



1 9 9 2

LƏNKƏRAN DÖVLƏT UNIVERSİTETİ

ELMİ XƏBƏRLƏR

RİYAZİYYAT VƏ TƏBİƏT ELMLƏRİ

№ 1, 2025

©Lənkəran Dövlət Universiteti, 2025

ISSN 2617-8052 (print)
ISSN 2960-1975 (online)

REDAKSIYA HEYƏTİ

1. İbrahimov Natiq (BAŞ REDAKTOR)

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

2. Şəmmədov Ramiz (APARICI REDAKTOR)

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

3. Axundov Ədalət

Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

4. Eftekharimehrabad Aziz

Ege Universiteti, İzmir, Türkiyə

5. Əhmədov Natiq

Azərbaycan Dövlət İqtisad Universiteti, Bakı, Azərbaycan

6. Əkpərov Zeynal

Genetik Ehtiyatlar İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

7. Əliyev Elvin

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

8. Əliyev Ələkbər

Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

9. Əliyev Nihan

Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

10. Əsgərov İdrak

Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

11. Əzizov Əbdülsəid

Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

12. Hasanov Aknazar Bekdurdievich

Səmərqənd Dövlət Universiteti, Səmərqənd, Özbəkistan

13. Hüseynov İsa

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

14. İsmayılov Çingiz

Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

15. Qardaşov Rauf

Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Akademik Həsən Əliyev adına Coğrafiya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

16. Qasimov Yusif

Azərbaycan Universiteti, Bakı, Azərbaycan

17. Quliyev Əlövsət

Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Torpaqşünaslıq və Aqrokimya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

18. Qurbanov Elşad

Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

19. Manafian Cəlil

Təbriz Universiteti, Təbriz, İran

20. Mehdiyev Məhəmməd

Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

21. Məmmədov Hüseyn

Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

22. Məmmədov Məmməd

Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Torpaqşünaslıq və Aqrokimya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

23. Nuriyev Urfat

Qarabağ Universiteti, Xankəndi, Azərbaycan

24. Reşidoğlu Xanlar

Iğdır Universiteti, Iğdır, Türkiyə

25. Sadenova Marzhan Anuarbekovna

Daulet Serikbayev adına Şərqi Qazaxıstan Texniki Universiteti, Ust- Kamenogorsk, Qazaxıstan

26. Yaqub Qabil

Kafkas Universiteti, Kars, Türkiyə

27. Zeynalov Eldar

Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Akademik Murtuza Nağıyev adına Kataliz və Qeyri-üzvi Kimya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

EDITORIAL BOARD

1. **Ibrahimov Natig (EDITOR IN-CHIEF)**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
2. **Shammadov Ramiz (MANAGING EDITOR)**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
3. **Akhundov Adalat**
Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Mathematics and Mechanics, Baku, Azerbaijan
4. **Eftekharimehrabad Aziz**
Ege University, Ege, Turkey
5. **Ahmədov Natig**
Azerbaijan State University of Economics, Baku, Azerbaijan
6. **Akparov Zeynal**
Institute of Genetic Resources, Baku, Azerbaijan
7. **Aliyev Elvin**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
8. **Aliyev Alakbar**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
9. **Aliyev Nihan**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
10. **Askerov Idrak**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
11. **Azizov Abdulsaid**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
12. **Hasanov Aknazar Bekdurdievich**
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
13. **Huseynov Isa**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
14. **Ismayilov Chingiz**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
15. **Gardashov Rauf**
Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Geography named after Academician Hasan Aliyev, Baku, Azerbaijan
16. **Gasimov Yusif**
Azerbaijan University, Baku, Azerbaijan
17. **Guliyev Alovzat**
Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Soil Science and Agrochemistry

18. Gurbanov Elshad

Baku State University, Baku, Azerbaijan

19. Manafian Jalil

Tabriz University, Tabriz, Iran

20. Mekhdiyev Mahammad

Baku State University, Baku, Azerbaijan

21. Mammadov Huseyn

Baku State University, Baku, Azerbaijan

22. Mammadov Mammad

Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Soil Science and Agrochemistry

23. Nuriyev Urfat

Ege University, Izmir, Türkiye

24. Reshidoghlu Khanlar

Igdir University, Igdir, Türkiye

25. Sadenova Marzhan Anuarbekovna

East Kazakhstan Technical University named after Daulet Serikbayev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

26. Yagub Gabil

Kafkas University, Kars, Türkiye

27. Zeynalov Eldar

Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Catalysis and Inorganic Chemistry named after Academician Murtuza Nagiyev, Baku, Azerbaijan

MÜNDƏRİCAT

1. Qorxmaz Ağayev	
Lənkəran təbii vilayəti çay ekosistemlərinin ekoloji mikrobiologiyası	7
2. Ziyafət Ağayev, Telman Bayramov, Zülfüli Rasulov, Şakira Rzayeva, Fəridə Soltanova	
Cənub-şərqi Azərbaycan çaylarının hidroloji xüsusiyyətləri və onları yaranan amillər.....	16
3. Натиг Ибрагимов, Габил Ягуб, Туба Улкер	
Вторая начально-краевая задача для нелинейного нестационарного уравнения шредингера со специальным градиентным слагаемым и с измермым ограниченным комплексным потенциалом, зависящим от времени.....	27

LƏNKƏRAN TƏBİİ VİLAYƏTİ ÇAY EKOSİSTEMLƏRİNİN EKOLOJİ MİKROBİOLOGİYASI

Qorxmaz Ağayev

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

e-mail: qorxmaz-1976@mail.ru

DOI: 10.30546/2960-1975.2025.1.007

Xülasə. Məqalədə Lənkəran təbii vilayətinin əsas çaylarında (o cümlədən Viləşçay, Astaraçay, Bolqarçay və b.) aparılmış ekoloji-mikrobioloji tədqiqatların nəticələri təqdim olunur. Tədqiqatlar zamanı su və lil nümunələri müxtəlif mövsümlərdə götürülmüş, onların fiziki-kimyəvi və mikrobioloji göstəriciləri analiz edilmişdir. Mövsümi dəyişikliklərin mikrofloranın ümumi tərkibinə, saprofit və koliform bakteriyaların yayılmasına təsiri müəyyən olunmuşdur. Həmçinin çayların hidroqrafik rejimi, çirklənmə mənbələri və antropogen təzyiqlər kontekstində ekoloji sabitliyin pozulma səbəbləri araşdırılmışdır. Nəticələr göstərir ki, torpaq eroziyası, məişət və sənaye tullantıları, qeyri-normativ su istifadəsi çay ekosistemlərinin mikrobioloji vəziyyətinə mənfi təsir göstərir. Məqalədə, həmçinin bu proseslərin Xəzərin cənub-qərb sahillərindəki bioloji məhsuldarlığa və ekosistem balansına olan təsirləri də vurğulanır.

Açar sözlər: Lənkəran təbii vilayəti, çay ekosistemləri, mikrobioloji göstəricilər, saprofit bakteriyalar, antropogen çirklənmə

Giriş

Lənkəran təbii vilayətini ölkəmizin digər region və ərazilərindən fərqləndirən əsas xüsusiyyətlərdən biri də burada yüksək sıxlıqla formalaşan çay ekosistemlərinin mövcudluğudur.

Azərbaycan Respublikasında mövcud olan 8400-ə yaxın çaydan 2000-dən çoxunun məhz Lənkəran təbii vilayətində yerləşməsi, bu ərazinin çay şəbəkəsinin zənginliyi baxımından xüsusi əhəmiyyət daşıdığını göstərir. Təbii vilayətdə çay şəbəkəsinin sıxlığı $0,82 \text{ km/km}^2$ təşkil edir ki, bu ölkə üzrə orta göstəricidən təxminən 3–3,2 dəfə yüksəkdir.

Lənkəran təbii vilayətində formalaşan çay ekosistemləri və onların hidroqrafik rejimi bilavasitə atmosfer çöküntülərinin illik miqdarı və paylanması ilə sıx şəkildə bağlıdır [13, s.90-110]. Bu xüsusiyyətlər çayların su rejiminin əsas mənbəyinin məhz yerli yağıntılar olduğunu göstərir. Regionun Azərbaycanın digər iqlimli ərazilərindən əsaslı surətdə fərqlənməsinin başlıca səbəblərindən biri də məhz atmosfer çöküntülərinin illik miqdarı və onların fəsillər üzrə paylanmasıdakı özünəməxsusluqdur. Belə ki, bu ərazidə yağıntıların 50–60%-i payız fəslinə təsadüf edir, bu isə ilin soyuq aylarında belə çaylarda suyun həcmnin azalmasına imkan vermir və s.

Lənkəran təbii vilayətinin səciyyəvi xüsusiyyətlərindən biri də ondan ibarətdir ki, bu ərazidə formalaşan çayların mənbəyi demək olar ki, tamamilə Azərbaycanın sərhədləri daxilində yerləşir və onların qida mənbələri və su balansını ölkəmizin daxili ehtiyatları hesabına təmin olunur. Bu amil su ehtiyatları məhdud olan Azərbaycan üçün strateji əhəmiyyət daşıyır və həmin resursların daha səmərəli, məqsədyönlü və minimal itkilərlə istifadəsini mümkün edir.

Vilayətdəki çayların böyük əksəriyyəti qısa axarlı və yerli əhəmiyyətlidir. Belə ki, bu ərazidə yerləşən çaylardan yalnız 64-nün uzunluğu 10–50 km, bir çayın uzunluğu 50–100 km, digərininki isə 100–200 km arasındadır. Bunlar bölgənin hidroqrafik şəbəkəsinin sıx, lakin kiçik çaylardan ibarət olduğunu təsdiqləyir.

Lənkəran təbii vilayətindəki çayların ümumi uzunluğu 4418 km, onların sutoplayıcı sahələrinin (hövzələrinin) ümumi ərazisi isə 5200 km^2 -dir. Bolqarçaydan başlayaraq Astaraçaya qədər uzanan ərazidə yerləşən çayların birgə illik su sərfi təxminən 1400 milyon m^3 və ya orta hesabla saniyədə $47,56 \text{ m}^3$ təşkil edir. Bu rəqəm ölkənin ümumi su balansının təqribən 4,7%-ni təşkil etsə də, regionun hidroqrafik rejimində əsas rolu atmosfer yağıntıları

oynadığı üçün bu ehtiyatlar nisbətən tez bir zamanda bərpa olunur. Nəticə etibarilə isə bu çaylar Lənkəran təbii vilayətinin ekoloji və təsərrüfat həyatında mühüm yer tutur.

Vilayətdəki çaylardan yalnız ikisi — Bolqarçay və Astaraçay tranzit çaylar kimi qiymətləndirilir. Belə ki, Bolqarçayın 135 km uzunluğundakı hissəsi Azərbaycan Respublikası ilə İran İslam Respublikası arasında sərhəd xəttini təşkil edir və bu çayın yalnız 33 km-lik axarı ölkəmizin ərazisinə daxildir. Astaraçay isə tamamilə (36 km) hər iki ölkə arasında sərhəd boyunca axaraq, sərhəd çayı statusuna malikdir.

Lənkəran təbii vilayətində çaylardan istifadə səviyyəsi ərazi və mövsüm üzrə fərqlənir. Belə ki, Viləşçaydan şimalda yerləşən çayların əksəriyyəti suvarma işlərinin intensiv aparıldığı yay aylarında — xüsusilə iyun, iyul və avqustda demək olar ki, quruyur. Bu, həmin çayların su ehtiyatlarının məhdudluğu və suvarma məqsədilə həddindən artıq istismarı ilə bağlıdır. Bununla yanaşı, respublikanın digər bölgələrindən fərqli olaraq, Lənkəran təbii vilayətində yerləşən çaylarda qış qıtsululuğu — yəni qış mejeni müşahidə olunmur. Bu fakt ərazidəki çayların su rejiminin əsasən iqlim amilləri, xüsusilə də atmosfer çöküntüləri ilə tənzimlənməsi ilə izah edilir [4, s.198-202].

2. Lənkəran təbii vilayəti çay ekosistemlərinin ekoloji-mikrobioloji vəziyyətlərinin səciyyəsi. Lənkəran təbii vilayətindəki çaylar əsasən kiçik dağ-çay ekosistemlərinə aid olub öz mənbəyini dağlıq ərazilərdən götürdüləri üçün güclü axın sürətinə malikdirlər. Bu xüsusiyyət xüsusilə intensiv yağıntılar zamanı özünü daha qabarıq göstərir. Belə hallarda dağ yamaclarında və mailli əkin sahələrində torpağın eroziyaya uğraması, aşınması və yuyularaq çay vasitəsilə düzən sahələrə daşınması prosesi baş verir. Nəticədə regionda çay ekosistemlərinin morfoloji strukturunda baş verən dəyişikliklər getdikcə daha geniş miqyas alır. Bu dəyişikliklərin əsas səbəblərindən biri də çay yataqlarında yerləşən çınqıl və qum örtüyünün inşaat məqsədilə kütləvi və kortəbii şəkildə istismar olunmasıdır. Bu kimi qeyri-qanuni və nəzarətsiz müdaxilələr çayların axın rejimini, sürətini dəyişdirir, məcrə morfolojiyasının pozulmasına, su itkisi səviyyəsinin artmasına, infiltrasiya və buxarlanma proseslərinin qeyri-sabit hala gəlməsinə səbəb olur. Nəticədə, çay ekosistemlərinin hidrologiyası və ekoloji tarazlığı pozulur.

Vilayətdəki çay ekosistemlərinin sabitliyinə mənfi təsir göstərən əsas antropogen amillər sırasında çay sularının çirklənməsi və qeyri-səmərəli istifadə formaları xüsusilə seçilir. Bu amillər çay ekosistemlərinin davamlı inkişafı və regionun su təhlükəsizliyi baxımından ciddi təhlükə yaradır.

Müasir dövrdə antropogen təsirlərin artması ilə əlaqədar olaraq, bir çox çaylara müxtəlif mənbələrdən, xüsusilə də məişət, sənaye və kənd təsərrüfatı fəaliyyətləri nəticəsində əmələ gələn çirkab sular axıdılır. Bu, çay ekosistemlərinin hidroekoloji vəziyyətinə mənfi təsir göstərməklə yanaşı, suların keyfiyyət göstəricilərinin ciddi şəkildə pisləşməsinə səbəb olur. Belə şəraitdə suyun keyfiyyətini yalnız onun təbii hidrokimyəvi parametrlərinə görə qiymətləndirmək kifayət etmir; çirklənməni xarakterizə edən digər kompleks göstəricilər də nəzərə alınmalıdır.

Çirkləndirici maddələrin spektri genişdir və bunlara orqanoleptik göstəricilər (rəng, qoxu, dad), toksik komponentlər (ağır metallar, pestisidlər və s.), mikrobioloji parametrlər (bakteriyalar, viruslar, patogenlər) və digər antropogen markerlər daxildir. Məsələn, içməli suyun keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi üçün ABŞ-da 19, Avropa ölkələrinin əksəriyyətində 21, keçmiş SSRİ-də isə 24 əsas göstəricidən istifadə olunurdu [8, s.20-40]. Üstəlik, təqribən 300-ə yaxın müxtəlif maddə üzrə məhdudlaşdırıcı qatılıq (maksimal icazə verilən konsentrasiya) dəyərləri müəyyən edilmişdir. Belə çoxsaylı parametr əsasında aparılan qiymətləndirmə, praktikada həm çətinlik törədir, həm də əldə olunan nəticələrin ümumiləşdirilməsini çətinləşdirir. Bu səbəbdən, son dövrlərdə çay sularının keyfiyyətini kompleks şəkildə əks etdirən inteqral (ümumiləşdirilmiş) göstəricilərdən istifadə daha

məqsədəuyğun hesab olunur. Bu yanaşma xüsusilə ABŞ, Almaniya, Fransa və İsveç kimi inkişaf etmiş ölkələrdə sürətlə inkişaf etməkdədir [9, s.205-220, 14, s.155-180].

İnteqral göstəricilərdən biri kimi bioloji induksiya üsulu geniş tətbiq edilir. Bu üsulda bəzi mikroorqanizmlərin mövcudluğu və ya yoxluğu həmin su hövzəsində çirklənmə dərəcəsini göstərən bioloji indikator kimi qəbul olunur. Ən effektiv qiymətləndirmə metodlarından biri suyun çirklənmə səviyyəsini müxtəlif göstəricilər əsasında sinifləşdirən kompleks təsnifatların tətbiqidir. Bu təsnifata əsasən, çay suları 6 qrupa ayrılır: çox təmiz, təmiz, az çirklənmiş, mülayim çirklənmiş, çirklənmiş və güclü çirklənmiş [10, s.55-65].

F.Ş. Əliyevin bu təsnifat üzrə apardığı qiymətləndirməyə əsasən, Lənkərançay (Sifidor məntəqəsi) və Təngərud çayı (Vaqo kəndi) təmiz, Viləşçay (Şıxlar kəndi) və İstisuçay (Alaşa kəndi) isə mülayim çirklənmiş sular kateqoriyasına aid edilmişdir. Bu qiymətləndirmələr Suların Çirklənmə İndeksi (SCİ) əsasında həyata keçirilmişdir [1, s.200-220].

O da qeyd olunmalıdır ki, regionda yerləşən çaylar yalnız daxili təsərrüfat və məişət ehtiyacları üçün deyil, həm də Xəzər dənizinin ekoloji vəziyyətinə təsir baxımından strateji əhəmiyyət daşıyır. Lənkəran təbii vilayətindəki çaylar yaşayış məntəqələri tərəfindən intensiv şəkildə istifadə olunmaqla yanaşı, Xəzər dənizinin sahil sularının fiziki-kimyəvi xüsusiyyətlərinin formalaşmasında və Cənubi Xəzərin cənub-qərb şelf zonasında ümumi bioloji məhsuldarlığın yaranmasında mühüm rol oynayır. Bu çaylar həmçinin Xəzərin keçici və yarımkeçici ixtiofaunasının — yəni müxtəlif balıq növlərinin həyat dövrlərinin müəyyən mərhələlərində istifadə etdikləri yaşayış və miqrasiya mühitlərinin təşəkkülündə xüsusi əhəmiyyətə malikdir. Bu səbəbdən, regionun bütün çay ekosistemlərinin qorunması və onların Xəzərlə qarşılıqlı əlaqələrinin davamlı şəkildə izlənməsi prioritet məsələlərdən biri olmalıdır.

Cənubi Xəzərin balıq sərvəti ehtiyatlarının qorunmasında həlledici rol oynayan ərəzilərdən biri də Qızılağac körfəzidir. Xüsusilə keçən əsrin 50-ci illərində bəndlə ayrılaraq şirin sulu hövzəyə çevrilmiş Kiçik Qızılağac körfəzinin ekoloji və bioloji həyatiliyinin təmin olunmasında Qumbaşı və Viləşçayın rolu mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu iki çayın körfəzdə su dövriyyəsinin və ekoloji tarazlığın saxlanmasında oynadığı funksional rol, ərəziyə yalnız ekoloji deyil, həm də iqtisadi, bioloji və elmi cəhətdən strateji status qazandırır. Lakin son illər bu çaylarla Kiçik Qızılağac körfəzi arasında su mübadiləsinin pozulması, yəni təbii hidroloji əlaqələrin tənzimlənməməsi və su axınlarının qarşısının alınması səbəbindən, o, tədricən yarımbataqlıq ərəziyə çevrilmiş, prosesin fəsadları son dərəcə ciddi ekoloji problemlərə gətirib çıxarmışdır. Böyük və Kiçik Qızılağac körfəzlərində aparılan son elmi tədqiqatlar nəticəsində sübuta yetirilmişdir ki, kiçik körfəzdə yazın sonu və payızın ilk yarısında anaerobioz — yəni oksigensiz həyat şəraitinin üstünlük təşkil etdiyi proseslər baş verir və bunun nəticəsində bentik (dibdə yaşayan) və bentofaq (dib orqanizmləri ilə qidalanan) canlılar kütləvi şəkildə məhv olurlar [3, s.10-15].

Göründüyü kimi, yalnız hidroloji rejimin dəyişməsi nəticəsində Cənubi Xəzərin ən qiymətli və bərəkətli sahələrindən biri öz önəm və funksiyasını itirmək təhlükəsi ilə üzləşmişdir. Bu faktlar bir daha sübut edir ki, Lənkəran təbii vilayətinin çay ekosistemləri yalnız regional deyil, həm də Xəzər dənizi səviyyəsində ekoloji sabitlik və bioloji məhsuldarlıq üçün əvəzsiz rol oynayır. Bu səbəbdən onların qorunması və davamlı istifadəsi istiqamətində kompleks və elmi əsaslandırılmış tədbirlərin görülməsi zəruridir.

Su ehtiyatlarından istifadə edən müxtəlif istehlakçılar (kommunal-məişət sektoru, sənaye müəssisələri, kənd təsərrüfatı və s.) üçün suyun keyfiyyətini müəyyən edən əsas hidrokimyəvi parametrlərdən biri onun ümumi minerallaşma dərəcəsidir. Bu göstərici çaylarda axımın miqdarı ilə sıx şəkildə bağlı olub, su rejiminin mövsümi dəyişkənliyi fonunda dinamik xarakter daşıyır. Suyun sərfi azaldıqca, xüsusilə də vegetasiya dövründə, onun minerallaşma səviyyəsi yüksəlməyə meyil göstərir. Bu, xüsusən yuyulmaya meyilli hidrokarbonatlı suxurların geniş yayıldığı hövzələrdə daha qabarıq şəkildə özünü göstərir.

Azərbaycan ərazisində hidroloji tədqiqatlar aparmış mərhum S.N. Rüstəmov [5, s.50-70] və M.A. Məmmədovun [4, s.120-145] araşdırmalarına əsasən, Lənkəran təbii vilayətindəki çayların suyu kimyəvi tərkib etibarilə hidrokarbonatlı-kalsiumlu sular sinfinə aid olub, vilayətinin mərkəzi və cənub hissəsindəki çaylar kalsium-karbonatlı, şimal-şərqində (Viləşçay hövzəsi) və Astaraçayın orta hövzəsindəki axarlar xloridli sulara aid olunur.

Lənkəran təbii vilayətində yerləşən çayların əksəriyyəti üçün orta illik minerallaşma dərəcəsi 200–500 mq/l intervalında dəyişir ki, bu da Ümumdünya Səhiyyə Təşkilatının qəbul etdiyi içməli su standartlarına uyğun olaraq orta səviyyəli minerallaşma kateqoriyasına aiddir. Belə sular həm içməli su kimi istifadəyə, həm də kənd təsərrüfatı məqsədləri üçün, xüsusilə suvarma işlərində tətbiqə yararlıdır. Minerallaşma səviyyəsinin mövsümi dəyişkənliyi də müşahidə olunur. Belə ki, yay aylarında (iyul–avqust) su sərfinin azalması fonunda minerallaşma maksimum həddə çatır, əksinə, ilin soyuq və rütubətli dövründə (mart–oktyabr) çay axımının artması nəticəsində bu göstərici minimal olur. Bu dəyişikliklər çayların tipik su rejimini əks etdirən mühüm hidrokimyəvi göstəricilərdən biridir.

Lənkəran vilayətinin çayları az minerallaşmış sularla xarakterizə olunsaydı, regionda yerləşən bəzi iri yaşayış məntəqələrinin su təminatında mühüm əhəmiyyətə malik olan Viləşçayda minerallaşma səviyyəsinin yüksək olduğu müəyyən edilmişdir. Müxtəlif fəsillər üzrə bu çayda minerallaşmanın dəyişmə aralığı 456–902 mq/l təşkil edir ki, bu da vilayətin digər çaylarına nisbətən 2–3 dəfə artıqdır. Belə bir fərq Viləşçayın su keyfiyyətinin həm təbii geokimyəvi amillərdən, həm də ətraf mühitə yönəlik antropogen təsirlərdən daha intensiv şəkildə təsirləndiyini göstərir.

Yay mövsümündə çayların qıtsulu fazaya daxil olması nəticəsində onların su sərfi əhəmiyyətli dərəcədə azalır. Bu şəraitdə çayların, xüsusilə aşağı axın hissələrində, hidrogeoloji baxımdan qırt suları üçün təbii drenaj funksiyasını yerinə yetirməsi müşahidə olunur. Nəticə etibarilə, çay sularının minerallaşma səviyyəsi artır və bununla yanaşı, əsas ion komponentlərindən olan xlorid (Cl^-), sulfat (SO_4^{2-}) və natrium (Na^+) ionlarının konsentrasiyası normativ hədləri keçərək yüksəlir. Bu, çayların hidrogeokimyəvi balansında mühüm dəyişikliklərə səbəb olur və suyun keyfiyyətinə birbaşa mənfi təsir göstərir.

Ümumilikdə, Lənkəran təbii vilayətinin çay hövzələrində müşahidə olunan əsas çirklənmə mənbələri aşağıdakı kimi müəyyən olunur:

- yaşayış məntəqələrindən axıdılan kommunal-məişət mənsəli çirkab suları;
- kənd təsərrüfatı sahələrində geniş şəkildə istifadə olunan üzvi (heyvan mənsəli tullantılar) və mineral gübrələr.

Bu çirkləndiricilər səth sularına ya birbaşa, ya da süzülmə və səthi axınlar vasitəsilə daxil olaraq çay sularının kimyəvi və mikrobioloji tərkibinin dəyişməsinə səbəb olur. Beləliklə, qıtsulu dövrdə təbii amillərlə yanaşı, antropogen təsirlər də çayların ekoloji vəziyyətinin pisləşməsində mühüm rol oynayır.

Qeyd etmək lazımdır ki, Lənkəran təbii vilayətində çay hövzələrində əkinçilik infrastrukturunu yüksək səviyyədə inkişaf etmişdir. Eyni zamanda, son illərdə enerji qıtlığı və genişmiqyaslı tikinti işləri ilə əlaqədar olaraq meşəliklər kəsilir, dağ yamaclarında otarılma intensivləşir, torpaq örtüyündə bitki qatı seyrəlik və nəticədə çay sularına böyük həcmdə terrigen-allüvial hissəciklər qarışır. Bundan əlavə, gübrələr, pestisidlər, detergentlər və digər çirkləndiricilərin çay ekosistemlərinə mənfi təsirləri mövcuddur. Mövcud mənbələrə əsasən, yalnız Talış dağlarından axan çay sularında aşkar olunan fenolların və ağır metal duzları-birləşmələrinin miqdarı sanitariya normaların 2 dəfə üzərindədir [2, s.80-100]. Həmçinin qeyd olunur ki, Lənkəran təbii vilayətində çay sularına orta hesabla ildə təxminən 125 min ton ümumi kimyəvi maddə qarışır. Xüsusilə, ən çox çirklənməyə məruz qalan Viləşçay və Qızılağac körfəzinin ərazisinə hər il 27 min ton kimyəvi birləşmələr, 3–4 ton neft mənsəli karbohidratlar, 18–20 min ton asılı maddələr, eləcə də 1000 tona qədər üzvi təbii substratlar

daxil olur. Bu maddələrin miqdarı çay ekosistemlərinin ekoloji vəziyyətinə və ümumi bioloji müxtəlifliyinə mənfi təsir göstərir.

Səciyyəvi cəhətlərindən biri odur ki, Azərbaycanın digər fiziki-coğrafi bölgələrindən fərqli olaraq, Lənkəran təbii vilayətində çay ekosistemləri daha kompakt və lokal xarakter daşıyır. Bu isə həmin ekosistemlərdə baş verən ekoloji dəyişikliklərin vizual və tədqiqat baxımından daha aydın müşahidə olunmasına şərait yaradır. Bu xüsusiyyət çay ekosistemlərinin həssaslığını və ekoloji balansdakı dəyişikliklərin intensivliyini daha qabarıq şəkildə ortaya qoyur.

Son 25–30 il ərzində bölgədə müşahidə olunan bir sıra ekoloji və sosial təsirlər — xüsusilə enerji daşıyıcıları ilə təminatdakı çatışmazlıqlar, meşə ərazilərində təbii tarazlığın pozulması, dağ ətəkləri və meşə kənarlarında yerləşən kolluq sahələrdə bitki örtüyünün seyrəkləşməsi və tapdanması regional iqlim şəraitində də dəyişiklik ehtimalını gündəmə gətirmişdir. Bu antropogen mənşəli dəyişikliklər təbii landşaft komplekslərində struktur-funksional pozuntulara səbəb olmuşdur [6, s.75-84]. Bu mənfi dəyişikliklərin təsiri çaylarda sediment (asılı və bərk mineral maddə) yükünün artımında da özünü göstərir. Belə ki, son illər ərzində çayların asılı-bərk dağınıq materiallarının orta illik həcmi əvvəlki illərlə müqayisədə təxminən 1,2–3 dəfə artmışdır. Hidroloji analizlər sübut edir ki, bu artım birinci növbədə meşə örtüyünün seyrəkləşməsi ilə əlaqəli olaraq güclənmiş torpaq eroziyası ilə bağlıdır. Nəticədə, çaylar vasitəsilə çöküntü şəklində daşınan terrigen (torpaq-mənşəli) maddələrin miqdarı artaraq, su hövzələrinin hidrokimyəvi və morfometrik parametrlərini dəyişdirmişdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, Lənkəran təbii vilayətindəki çaylardan əvvəllər başlıca olaraq kənd təsərrüfunda suarmada istifadə edildiyi halda son 20-25 ildə onlardan məişətdə də istifadə ildən-ilə artır. Belə ki, Azərbaycan Respublikasının Dövlət Statistika Komitəsinin Azərbaycan Meliorasiya və Su Təsərrüfatı Açıq Səhmdar Cəmiyyətinin məlumatlarına əsaslanan rəsmi açıqlamasına görə bölgədə ümumi su istehlakı 2000-ci ildə 33,4 mln. m³ olmuşdursa, 2023-cü ildə bu 5 dəfəyə qədər artaraq 152,8 mln. m³-ə çatmışdır. Çay hövzələrinə bu illərdə atılan çirkab suların ümumi həcmi 0,01 mln. m³-dən 1,7 mln. m³-dək artmışdır. Eyni zamanda da bölgədə su itkisi də çoxalmışdır. Belə ki, rəsmi sənəddə göstərilir ki, bölgədə ümumi su itkisi 2002-ci ildə 18,1 mln m³, 2017-ci ildə isə 39,1 mln m³ təşkil etmişdir.

Təəssüflə qeyd olunmalıdır ki, Lənkəran təbii vilayətində yerləşən çaylar və çay hövzələrinin mühafizəsi üzrə zəruri tədbirlər həyata keçirilmir. Ərazidəki çayların əksəriyyətində suqoruyucu və ekoloji qoruma tədbirlərinin olmaması həmin su obyektlərinin təbii rejiminin pozulmasına səbəb olur. Çay sahilləri, xüsusilə kənd, qəsəbə və şəhər yaşayış məntəqələrinə yaxın ərazilərdə çay məcralarının və sahil zolaqlarının tikinti və inşaat materiallarının (xüsusilə çınqıl və qum) istismarı məqsədilə geniş şəkildə istifadə olunması müşahidə edilir.

Regionda əhalinin keyfiyyətli içməli su ilə təminatında da ciddi çətinliklər mövcuddur. Suyun ekoloji mühafizəsi məsələsi bölgədə daha çox diqqət və təxirəsalınmaz tədbirlər tələb edir. Hazırda içməli suya olan tələbat əsasən artezian və quyu suları hesabına ödənilir. Lakin yağıntıların miqdarının yüksək olduğu payız, qış və yaz aylarında quyulardakı su səviyyəsi kəskin şəkildə qalxır və nəticədə su torpaq səthinə qədər çıxır. Bu hal isə çirkab sularının asanlıqla quyulara qarışmasına və içməli suyun mikrobioloji çirklənməsinə gətirib çıxarır. Xüsusilə qrunut sularının səthə yaxın yerləşdiyi ərazilərdə təmiz və təhlükəsiz su ilə təminat məqsədilə regionda mövcud olan təbii su mənbələrindən istifadə daha məqsədəuyğun hesab edilir.

Aparılan müşahidələrə əsasən, bölgə çaylarının məcralarında və sahillərində inşaat məqsədilə aparılan daş və çınqıl istismarı su səviyyəsinin azalmasına, bunun nəticəsində isə ətraf torpaqlarda su eroziyasının intensivləşməsinə səbəb olur. Eyni zamanda, çay axarlarının təbii rejimə uyğun olmayan şəkildə dəyişdirilməsi və geotermal suların nizamsız şəkildə

çaylara və ya ətrafa axıdılması torpaqların bataqlıqlaşma prosesini sürətləndirir. Bəzi ərazilərdə torpaqların daşınması nəticəsində geniş sahəni əhatə edən durğun çirkli su hövzələri (gölməçələr) formalaşmışdır ki, bu da malyariya kimi infeksiya xəstəliklərin yayılması üçün əlverişli şərait yaradır. Bu hallar göstərir ki, Lənkəran təbii vilayətində çay ekosistemlərinin qorunması, su ehtiyatlarının dayanıqlı istifadəsi və ətraf mühitin sağlamlığı məqsədilə kompleks tədbirlərin həyata keçirilməsi zəruridir.

Lənkəran təbii vilayətinin çay ekosistemləri bölgədəki ekoloji ziddiyyətlərin və transformasiyaların əsasən antropogen təsirlərlə bağlı olduğunu aydın şəkildə göstərir. Məsələn, Qumbaşıçayın sularının Kiçik Qızılağac körfəzinə nəzərdə tutulan həcmdə daxil olmaması nəticəsində bu ekoloji baxımdan dəyərli su-bataqlıq kompleksi ciddi dəyişikliklərə məruz qalmış, körfəzin hidroloji rejimi, su-duz balansı və bioekoloji durumu pozulmuşdur.

Ümumilikdə, əhalinin sıx məskunlaşdığı ərazilərdə məişət, kənd təsərrüfatı və sənaye sahələrində çaylardan intensiv istifadə ekosistem sabitliyini təhlükə altına alır. Buna görə də çay resurslarından səmərəli istifadə və onların ekoloji tarazlığının bərpası prioritet məsələlərdəndir. Bu kontekstdə çayların hidrokimyəvi və ekoloji-mikrobioloji vəziyyətinin kompleks şəkildə tədqiqi müasir elmi araşdırmaların əsas istiqamətlərindən biri olmalıdır.

Lənkəran təbii vilayətində su balans, təsərrüfat əhəmiyyəti və digər xüsusiyyətlərinə görə seçilmiş 10 çayda ilkin olaraq ilin fəsillərinə uyğun müşahidələr aparılmış və mikrobioloji tədqiqatlar üçün su ilə birlikdə lil və qrunn nümunələri toplanmışdır. Bu çaylar arasında Astarəçay, Pensərçay (Təngərudçay), Lənkərançay, Girdənəçay, Veravulçay, Qumbaşıçay, Boladıçay, Viləşçay, Göytəpəçay və Bolqarçay yer alır. Nümunələr həm təmiz, mənbə sahələrindən, həm iri yaşayış məntəqələrinin yaxınlığından, həm də heyvandarlıq və quşçuluq təsərrüfatları ilə əlaqəli, eləcə də digər istehsal sahələrinin çirkab sularının axıdıldığı ərazilərdən əldə edilmişdir.

Əlavə olaraq, çay məcralarına yaxın yerləşən sahələrdə, əhali tərəfindən məişət məqsədləri üçün geniş istifadə olunan quyu sularından da nümunələr toplanaraq analiz edilmişdir. Nümunələr hər dəfə steril şüşə qablarla götürülmüş və ilkin mikrobioloji əkmələr yerində aparılmışdır. Daha sonra nümunələrin kameral işlənmə ilə tamamlanmışdır. Mikrobioloji analizlər zamanı mövcud və geniş tətbiq olunan metod və tövsiyələrdən istifadə edilmiş, mikrofloranın ümumi miqdarı — birbaşa filtrlər üzərində mikroskop altında saymaq üsulu ilə müəyyənəşdirilmişdir [12, s.20-40]. Hər ekspedisiyada çay sularının fiziki göstəricilərindən olan temperatur və şəffaflıq səviyyələri daimi olaraq ölçülmüşdür. Bundan əlavə, sularda alloxton mənşəli, əsasən antropogen təsirlər nəticəsində yaranan üzvi maddələrlə çirklənmənin bariz göstəricisi sayılan bioloji oksigen məsrəfi (BOM) da ətraflı şəkildə tədqiq olunmuşdur. Bu məqsədlə G.G. Vinberq tərəfindən təklif edilmiş Vinkler-Vinberq üsulundan istifadə edilmişdir [7, s.25-50].

Əldə olunan mikrob kulturalarının say və tərkibinə keçməzdən əvvəl qeyd etmək lazımdır ki, tədqiq olunan çaylarda suyun şəffaflığı il boyu çox aşağı səviyyədə — 0,1–0,2 metr arasında dəyişir. Yay fəslə istisna olmaqla, digər bütün mövsümlərdə sularda bulanıqlıq daha güclüdür və bu xüsusilə yağmurlu dövrlərdə daha qabarıq şəkildə özünü göstərir. Çay sularında əsasən terrigen mənşəli, yəni torpaqdan gələn çöküntülər üstünlük təşkil edir. Buna görə də mikrofloranın ümumi say göstəriciləri bütün nümunə götürülən məntəqələrdə oxşar səviyyədə müşahidə olunur. Yağışlar nəticəsində sularda bulanıqlığın artdığı dövrlərdə saprofit bakteriyaların petri fincanlarında əmələ gələn koloniyaların morfoloji xüsusiyyətləri, rəngləri və digər göstəricilərində fərqlilik çox zəif və ya demək olar ki, nəzərə çarpmır.

Maraqlıdır ki, əldə edilən bakteriya kulturalarında oxşar cəhətlərin üstünlük təşkil etməsini M. Fyodorov [15, s.120-160] və A. Rodina [11, s.70-110] alloxton mikrofloranın, yəni torpaq mənşəli mikroorqanizmlərin sulara qarışması ilə əlaqələndirmişlər. Əgər bu ehtimalla razılaşsaq, o zaman qeyd olunan mikroflora tərkibinin əsasən torpaq mikroorqanizmlərinə məxsus olması məntiqi və qəbul ediləndir.

Lənkəran təbii vilayəti çay ekosistemlərində ümumi mikrofloranın, saprofit və koliform bakteriyaların miqdarı (2024-ci il).

Çaylar	Qış			Yaz		
	MUM, mln/ml	SP, min/ml	KB/ml	MUM, mln/ml	SP, min/ml	KB/ml
Astaraçay	1,9	22,0	150,0	3,2	41,0	310,0
Pensərçay	3,3	12,0	200,0	3,1	25,0	210,0
Lənkərançay	4,2	33	600,0	5,3	42,0	320
Girdəniçay	2,2	24	125,0	5,1	25,0	210,0
Veravulçay	2,3	5,0	20,0	4,3	10,0	60,0
Boladiçay	1,5	2,0	30,0	2,7	14,0	210,0
Qumbaşıçay	4,3	11,0	70,0	5,6	9,6	170,0
Viləşçay	4,2	16,0	450,0	11,2	40,0	200,0
Göytəpəçay	3,4	26,0	170,0	8,3	14,0	210,0
Bolqarçay	3,2	4,5	150,0	5,4	35,0	250,0

Qeyd etmək lazımdır ki, Lənkəran təbii vilayətində ən iri sayılan, yuxarıda adı çəkilən çayların hamısı nisbətən qısa uzunluğa malikdir və maillik dərəcələri yüksək olduğundan su sürətlə axır. Bu səbəbdən, torpaq mənşəli terrigen hissəciklər və digər bərk maddələr çay məcrasında tam çökmür və mənbədən yağış suları ilə birlikdə vadilərə qədər asanlıqla yayılır. Elə bu amil əsas səbəb kimi mikrofloranın ümumi say göstəricilərinin çayın bütün axar boyunca oxşar səviyyədə qalmasına gətirib çıxarır. Bununla belə, mikrob kulturlarının keyfiyyət göstəricilərində seçkili fərqliliklər müşahidə olunur (Yuxarıda cədvələ bax).

Olduqca səciyyəvidir ki, saprofit bakteriyaların kulturlarında morfoloji növ xüsusiyyətləri üzrə aparılan müşahidələr nəticəsində çay sularında məntəqələrə görə fərqli nəticələr əldə olunmuşdur. Belə ki, torpaq mikroflorası üstünlük təşkil edən sahələrdə mikrob kulturlarında mikrokoklar, aktinomisetlər və ibtidai göbələklərin sayı çox olur. Əksinə, üzvi çirklənmənin baş verdiyi ərazilərdən götürülmüş nümunələrdə isə sarsinlər, çöpvari bakterial formalar və ümumiyyətlə sporsuz bakteriyalar 75–80%-ə qədər üstünlük təşkil edir. Bundan əlavə, çayların üzvi çirklənməsinin müəyyənləşdirilməsində biodestruksiya ilə bağlı nəticələr xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Çünki saprofit bakteriyaların kəmiyyət və keyfiyyət baxımından dəyişməsi mühitdə mövcud olan üzvi maddələrin tərkibi və konsentrasiyasından asılıdır. Bu baxımdan yay fəslində əldə olunan nəticələr daha maraqlı hesab olunur və hövzələrin ekoloji vəziyyətini nisbətən açıq şəkildə nümayiş etdirir.

Nəticə. Lənkəran təbii vilayətinin tədqiq edilmiş və adları yuxarıda cədvəldə göstərilmiş 10 ən iri çay ekosistemlərində qış aylarında yazla müqayisədə təxminən 2 dəfə azdır. Bu nisbət saprofit bakteriyaların miqdarında da eyni şəkildə özünü göstərir. Lakin koliform bakteriyaların yaz fəslindəki miqdarı qış aylarında ölçülən göstəricilərdən 10 dəfə yüksəkdir. Bu, yaz yağışları və ərimiş qar suları vasitəsilə torpaqdan yuyulan alloxton üzvi maddələrin çoxalması ilə əlaqələndirilə bilər. Bundan əlavə, tədqiq olunan çayların bütün məntəqələrində koliform bakteriyaların aşkar olunması onu göstərir ki, bu ekosistemlər koliform bakteriyalarla çirklənməyə məruz qalan mənbələrə malikdirlər. Əhali tərəfindən bu

çayların məişət ehtiyacları üçün geniş istifadə edildiyi nəzərə alınaraq, onların fekal çirklənməsindən qorunması, yəni bütün hövzə üzrə sanitariya və ekoloji rejimlərin ciddi şəkildə təmin olunması zəruridir.

Ədəbiyyat

1. Əliyev, F. (2000). Azərbaycan Respublikasının yeraltı suları, ehtiyatlardan səmərəli istifadə və geoloji problemləri. Bakı, Çəşioğlu. 326 s.
2. Hacıyev, Q. (2004). Azərbaycan Respublikasında yerüstü suların keyfiyyətinin müasir vəziyyəti. Kür çökəkliyinin təbiəti və ekoloji problemləri. Bakı, 110 s.
3. Hüseynov, A. (2007). Xəzərin Qızılağac körfəzinin müasir ekoloji vəziyyəti [Avtoreferat, biologiya üzrə elmlər namizədi]. Bakı. 21 s.
4. Məmmədov, M. (2002). Azərbaycanın hidroqrafiyası. Bakı, Nafta Press. 312 s.
5. Rüstəmov, S. (1960). Azərbaycan SSR çayları və onların hidroloji xüsusiyyətləri. Bakı, Elm. 180 s.
6. Salmanov, M., Ənsərova, A., Ağayev, Q. (2012). Xəzər dənizinin bioehtiyatlarının müasir ekoloji vəziyyəti. İnsan və Biosfer (MaB, YUNESKO) Azərbaycan Milli Komitəsinin əsərləri, 8, s.75–84.
7. Винберг, Г. (1962). Первичная продукция водоемов. Минск, Издательство АН БССР. 340 с.
8. Владимиров, А. (1976). Сток рек в маловодный период года. Ленинград, Гидрометеиздат. 297 с.
9. Владимиров, А., Ляхин, Ю., Матвеев, Л., Орлов, В. (1991). Охрана окружающей среды. Ленинград, Гидрометеиздат. 424 с.
10. Владимиров, А., Орлов, В., Сакович, В. (1997). Экологические аспекты использования и охраны водных ресурсов (вод суши). Санкт-Петербург, РГГМИ. 125 с.
11. Родина, А. (1965). Методы микробиологических исследований (Лабораторное руководство). Минск, Наука. 340 с.
12. Романенко, В., Кузнец, С. (1974). Экология микроорганизмов пресных водоемов. Ленинград, Наука. 194 с.
13. Рустамов, С., Кашкай, Р. (1989). Водные ресурсы Азербайджана. Баку, Элм. 210 с.
14. Фашевский, Б. (1996). Основы гидрологической экологии. Минск, Экоинвест. 240 с.
15. Федоров, М. (1954). Почвенная микробиология. Москва: Государственное издательство Советская наука. 484 с.

ECOLOGICAL MICROBIOLOGY OF RIVER ECOSYSTEMS IN THE LANKARAN NATURAL REGION

Gorkhmaz Agayev

Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan

The article presents the results of ecological and microbiological investigations conducted in the main rivers of the Lankaran natural region (including the Vileshchay, Astarachay, Bolgarchay, and others). During the research, water and sediment samples were collected across different seasons and analyzed for their physicochemical and microbiological parameters. The influence of seasonal variations on the overall composition of microflora, as well as the distribution of saprophytic and coliform bacteria, was determined. In addition, the study examined the causes of ecological instability within the context of river hydrographic regimes, pollution sources, and anthropogenic pressures. The results indicate that soil erosion, domestic and industrial waste, and non-regulated water usage have a negative impact on the microbiological status of river

ecosystems. The article also highlights the implications of these processes for biological productivity and ecosystem balance along the southwestern shores of the Caspian Sea.

Keywords: Lankaran natural region, river ecosystems, microbiological indicators, saprophytic bacteria, anthropogenic pollution

ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ МИКРОБИОЛОГИЯ РЕЧНЫХ ЭКОСИСТЕМ ЛЕНКОРАНСКОЙ ПРИРОДНОЙ ОБЛАСТИ

Горхмаз Агаев

Лянкяранский государственный университет, Лянкяран, Азербайджан

В статье представлены результаты эколого-микробиологических исследований, проведённых в основных реках Ленкоранской природной области (в том числе в реках Виляшчай, Астарачай, Болгарчай и др.). В ходе исследований были отобраны пробы воды и ила в разные сезоны года, а также проанализированы их физико-химические и микробиологические показатели. Установлено влияние сезонных изменений на общий состав микрофлоры, а также на распространение сапрофитных и колиформных бактерий. Кроме того, в контексте гидрографического режима рек, источников загрязнения и антропогенного давления были изучены причины нарушения экологической стабильности. Результаты показывают, что эрозия почв, бытовые и промышленные сточные воды, а также несоблюдение нормативов водопользования оказывают негативное влияние на микробиологическое состояние речных экосистем. В статье также подчёркивается влияние этих процессов на биологическую продуктивность и экологическое равновесие прибрежных районов юго-западной части Каспийского моря.

Ключевые слова: Лянкяранская природная область, речные экосистемы, микробиологические показатели, сапрофитные бактерии, антропогенное загрязнение

Daxil oldu: 17.03.2025

Çap edildi: 26.05.2025

KİÇİK QAFQAZ TƏBİİ VİLAYƏTİ ÇAY AXIMLARININ FORMALAŞMA XÜSUSİYYƏTLƏRİ

Ziyafət Ağayev

Telman Bayramov

Zülfəli Rasulov

Şakira Rzayeva

Fəridə Soltanova

Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi akademik Həsən Əliyev adına Coğrafiya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

e-mail: kreativagayev@gmail.com

e-mail: telman.bayramov.48@mail.ru

e-mail: zulfeli.rasulov@mail.ru

e-mail: raksanasafarova@gmail.com

e-mail: mehinsultanova20@gmail.com

DOI: 10.30546/2960-1975.2025.1.036

Xülasə. Məqalədə Azərbaycan Respublikasının Kiçik Qafqaz təbii vilayəti çaylarının (Naxçıvan MR istisna olmaqla) əsas hidroloji xüsusiyyətləri və onların formalaşmasına təsir edən amillər təhlil edilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, ərazi çayları daha çox təbii tənzimləməyə malik olmaqla onların qida mənbəyinin 60%-dən çoxunu yeraltı sular təşkil edir. Çay hövzələrinin orta yüksəkliyi artdıqca yeraltı qidalanma dahada artır. Qeyd etmək lazımdır ki, ərazi çaylarının su ehtiyatları və hidroloji xüsusiyyətlərinə regional iqlim dəyişmələri, çay hövzələrinin morфометрик göstəriciləri, antropogen amillər ilə yanaşı ərazinin uzun illər erməni işğalı altında olmasının da güclü təsiri olmuşdur. Bu isə öz növbəsində təbii vilayət çaylarında suların kəmiyyət və keyfiyyət göstəricilərinin rejiminin formalaşmasına səbəb olur. Belə ki, son 30 ildə təbii vilayətdə axan ərazi çayları ciddi sürətdə çirklənməyə məruz qalmaları ilə yanaşı qış azsulu dövr axımının artması müşahidə olunmuş, illik axımın, daşqın və gürsulu dövr axımlarının həcmi azalmaqla ümumi su ehtiyatlarında ciddi azalma müşahidə olunmuşdur (14 %). Tədqiqatçılar göstərir ki, belə davam etsə yaxın gələcəkdə təbii vilayət çaylarının axım kəmiyyəti daha 30-35% azala bilər.

Açar sözlər: hidroloji xüsusiyyətlər, axım kəmiyyəti, çay axımı, axım fazaları, çay şəbəkəsi, iqlim dəyişmələri, rejim xüsusiyyətləri, qidalanma rejimi

Giriş

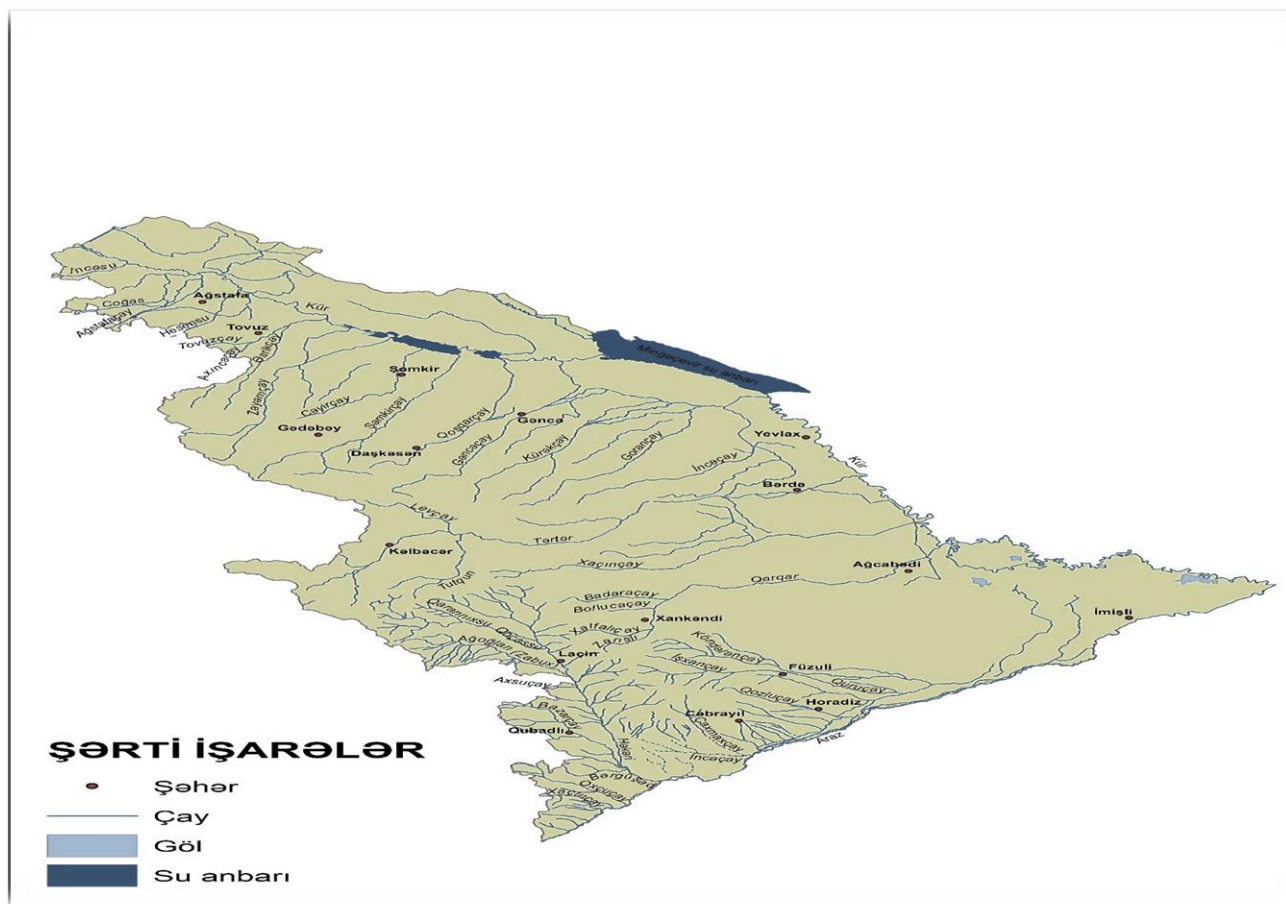
Müasir global iqlim dəyişmələri dövründə sürətlə artan dünya əhalisinin su təminatı məsələsi ən aktual problem kimi bəşəriyyəti narahat edir. İqlim dəyişmələri, xüsusilə, global istiləşmənin regional təzahürləri su ehtiyatlarının azalmasına, əhalinin ərzaq təminatına, regionların ekoloji təhlükəsizliyinə və təhlükəli hidrometeoroloji proseslərin artmasına birbaşa təsir göstərir. Ayrı-ayrı ölkələrdə müxtəlif xarakter daşıyan bu problem Azərbaycan Respublikası üçün də son illər daha aktual xarakter daşıyır. Azərbaycan Respublikasının bütün regionlarının, o cümlədən işğaldan azad olmuş ərazilərimizin son illərdəki davamlı intensiv sosial-iqtisadi inkişafı, yeni kəndlərin, qəsəbələrin, digər yaşayış məntəqələrinin salınması, sənaye və kənd təsərrüfatı müəssisələrinin yaradılması, aqrar sektorun inkişafı, turizmin inkişafı suya olan tələbatı hiss olunacaq dərəcədə artırmaqdadır. Gələcəkdə su təminatını yaxşılaşdırmaq üçün yalnız sudan istifadəni azaltmaq, ondan qənaətlə istifadə etmək kifayət deyil, eyni zamanda su ehtiyatlarımızın artırılması istiqamətində tədqiqatlar və praktiki işlər sürətləndirilməlidir. Bu istiqamətdə son illər Azərbaycan Respublikasının Prezidenti Cənab İlham Əliyev tərəfindən bir sıra qərarlar və layihələr qəbul edilmişdir ki, sonuncu sərəncam (05 aprel 2021-ci il) birbaşa işğaldan azad edilmiş ərazilərin su ehtiyatlarının yaxşılaşdırılması və idarə olunması ilə bağlıdır.

Azərbaycanın ərazisinin böyük bir hissəsi arid zonada yerləşdiyinə görə onun ümumi və xüsusilə yerli su ehtiyatları ($30,9 \text{ km}^3$) məhdud olması ilə yanaşı həm də ərazi üzrə çox qeyri-bərabər paylanmışdır. Nəzərə alsaq ki, bu ehtiyatların $2/3$ hissəsi transsərhəd çaylarda qonşu dövlətlərin ərazisində formalaşdıqdan sonra respublikamızın ərazisinə daxil olur, onda problemin nə qədər dərin olduğu daha aydın görünür. Digər tərəfdən ölkəmizin 20% -ə qədər ərazisinin 30 ilə yaxın bir dövrdə erməni işğalı altında olması, orada yerləşən su ehtiyatları haqqında məlumatların olmaması və ya köhnə olması bütövlükdə respublikamızın, o cümlədən, Kiçik Qafqaz ərazisində yerləşən çayların hidroloji xüsusiyyətləri və onları yaradan səbəbləri, onların ekoloji xüsusiyyətlərini və ərazinin su ehtiyatlarını kəmiyyət və keyfiyyət göstəriciləri baxımından yenidən qiymətləndirilməsini tələb edir.

Təhlil və müzakirə

Azərbaycanın, o cümlədən Kiçik Qafqaz təbii vilayətinin su ehtiyatlarının sistematiki qeydiyyatı 1920-ci illərin axırlarından başlansa da, onların metodiki əsaslarla qiymətləndirilməsi 50-ci illərin əvvəllərindən aparılmışdır. Bu tədqiqatlar S.H.Rüstəmov tərəfindən başlanmış, sonradan R.M.Qaşqay və başqaları tərəfindən davam etdirilmişdir [1, s.115].

Su ehtiyatlarının idarə olunması məqsədi ilə Kiçik Qafqaz çayları üzərində xüsusi əhəmiyyətə malik olan müşahidə məntəqələri 1925-ci ildən yaradılmağa başlanmışdır. İlk belə müşahidə məntəqələri Gəncəçay, Tərtərçay, Şəmkirçay və Kürəkçay üzərində yaradılmış, sonra bunların sayı 49-ə çatdırılmışdır. Lakin qeyri-müəyyən səbəblər üzündən 50-ci illərin axırı və 60-cı illərin əvvəllərində bu müşahidə məntəqələrin bir hissəsi bağlanmışdır. Məlum Qarabağ hadisələri nəticəsində isə ərazidə mövcud olan müşahidə məntəqələrinin əksəriyyəti tamamilə fəaliyyətini dayandırmışlar. Nəticədə ərazidə yerləşən çayların çox hissəsində 30 ilə yaxın bir dövrdə müşahidələrin aparılmaması bununla əlaqədar çətinliklər yaratmış, ərazidə yerləşmiş çayların axımının müxtəlif xarakteristikalarını, onların hidroloji xüsusiyyətlərini və su ehtiyatlarını dəqiqliklə qiymətləndirmək mümkün olmamışdır. Erməni işğalına son qoyulduqdan sonra möhtərəm Prezidentimiz Cənab İ.Əliyevin məlum sərəncamı ilə ərazidə bu istiqamətdə geniş miqyaslı tədbirlər həyata keçirilməkdədir.



Şəkil 1. Kiçik Qafqaz vilayətinin çay şəbəkəsi

Azərbaycan Respublikasının qərbində, əsasən Ermənistan və qismən Gürcüstanla sərhəddə yerləşmiş Kiçik Qafqaz təbii vilayətin ümumi sahəsi 29040,381 km² olub Azərbaycan Respublikası ərazisinin təqribən 25%-ni təşkil edir [4, s.7]. Ərazi çaylarının su hövzəsinin ümumi sahəsi isə 37800 km² olub onun çox hissəsi (22400 km²) Kür çayının sağ qolları, bir hissəsi (15400 km²) isə Araz çayının sol qolları hövzəsinin payına düşür [8, s.14] (Şəkil 1).

Kiçik Qafqaz təbii vilayəti ərazisində axan və ərazinin su ehtiyatlarının əsasını təşkil edən çaylar əsasən Xəzər dənizi hövzəsinə aid olub onların ümumi sayı 4206-ə bərabərdir ki, bu çayların da 4100-dən çoxunun uzunluğu 10 km-dən azdır. Ərazi çaylarının axımına aid ədəbiyyat və stasionar müşahidə məlumatlarının təhlili göstərir ki, çaylar ərazinin əsas hidroqrafik şəbəkəsini yaradırlar. Bu çayların bir sıra morfometrik xüsusiyyətləri aşağıdakı cədvəl 1-də göstərilmişdir.

Kiçik Qafqaz təbii vilayəti çaylarının ən başlıca morfometrik xüsusiyyətləri Cədvəl 1.

Nö	Çayın adı	Uzunlu- ğu, km	Hövzə- sinin sah,km ²	Mənbə yinin yüksək- liyi,m- lə	Sıxlıq dərə- cəsi km/ km ²	Əsas qida mənbəyi	Sutopla- yıcı höv- zəsinin orta hünd.,m	Axım əmsalı h/x	Orta illik axım həcmi 10 ⁶ m ³
1	Tərtər çay	200	2650	3120	0,82	y/altı,qar	1820	0,40	721

2	Bərgüşadçay (Bazarçay)	178	2711	3040	0,53	y/altı,qar			690
3	Xaçınçay	119	657	2100	0,82	yağış,y/altı	1558	0,38	104,9
4	Qarqarçay	115	1490	2080	0,49	yağış,y/altı	1241	0,21	66,5
5	Həkəri çay	113	2570	2580	0,31	y/altı,qar	1690	0,29	303
6	Köndələn çay	102	536	1780	0,63	yağış,y/altı	780	0,17	18,9
7	Oxçu çay	83	1140	3285	0,65	qar, y/altı	1980		315,4
8	Quruçay	82	512	2320	0,68	yağış,qar	1160	0,19	43,6
9	Harançay	81	441	2580	0,53	y/alt,qar	1158	0,37	105,2
10	Bəsitçay	44	354	2600	0,47	y/alt,qar	1460		51,0
11	Çaxmaqçay	18	38	1770	0,52	y/alt,qar	1140		3,18
12	Padardərəçay	16	58	500	0,70	y/alt,qar	850		9,14
13	Ağstafaçay	133	2586	3000	0,58	yağış,qar	1418	0,28	416,0
14	Həsənsu	71	352	2660	0,84	y/altı,yağış	1156	0,29	68,0
15	Axıncaçay	76	1178	1950	0,63	qar, y/altı	1142	0,27	130,41
16	Tovuzçay	42	278	1900	0,93	y/altı,qar	1490	0,21	32,5
17	Əsrikçay	48	170	1750	0,82	y/altı,qar	1420	0,26	5,8
18	Zəyəmçay	90	942	2020	0,78	y/altı,qar	1312	0,35	155,5
19	Zahirçay	58	326	1860	0,75	y/altı,qar	1083		49,0
20	Şəmkiçay	95	1170	3220	0,83	y/altı,qar	1900	0,41	270,0
21	Qoşqarçay	76	798	2360	0,39	yağış, qar	769	0,25	107,4
22	Gəncəçay	99	752	2814	0,64	y/alt,qar	2090	0,40	144
23	Kürəkçay	126	2080	3100	0,36	y/altı,qar	797		457
24	Görançay	81	623	3100	0,53	y/altı,yağı	1158	0,35	105,2
25	İncəçay	83	205	2580	0,78	y/altı,qar	1018		48,0
26	Uncaçay	51	351	1370	0,14	yağış,y/altı	840		21,1
27	Çaylak	32	190	1700	0,36	yağış,y/altı	990		6,0
28	Qozluçay	28	100	1520	0,28	yağış,y/altı	860		6,0
29	Çayrı	58	326		1,81	y/altı,qar	1083	0,31	49,0
30	Horadizçay	13	32	980	0,005	yağış,y/altı	600		1,58
31	Cəbrayılçay	12	38		0,01	yağış,y/altı	650		2,9
32	Daşsalahlı	29	82		0,29	y/altı,qar	720		9,50
33	Acisu	13	40		0,10	y/altı,qar	610		7,90
34	Çobançay	15	47		0,12	y/altı,qar	650		7,90
35	Qaranlıqçay	18	54		0,27	y/altı,qar	920		7,29
36	Xonaşençay	52	234		0,37	y/altı,yağış	820		13,9
37	Köndələnçay	102	536	1780	0,63	y/altı,yağış	708		
38	Şorsu		63		0,16	y/altı,yağış	670		11,0
39	Ağcaqoşun	45	32			y/altı,yağış	170		

Çayların axımının rejim xüsusiyyətlərini öyrənmək üçün hidrologiyada müxtəlif metodlardan istifadə olunur. Lakin həmin metodlar çay hövzələrinin təbii şəraitini ətraflı öyrənmədən onların rejim xüsusiyyətlərini izah edə bilmir. Məhz bu səbəbdən çayların hidroloji rejim xüsusiyyətlərinin coğrafi-hidroloji öyrənilməsi daha perspektivlidir ki, məqalədə bu məsələlərə geniş yer verilir.

Axım çay hövzələrində çoxsaylı proseslərin nəticəsində formalaşır. Axım əmələ gətirən amillər çay axımının yaranmasına birbaşa və dolayı yolla təsir göstərən səbəblərdir. Çayların rejiminə və axım xarakteristikalarına təsir göstərən bütün fiziki-coğrafi amillər iki qrupa

bölünür: iqlim və səth amilləri. İqlim, xüsusilə yağıntıların illik miqdarı çay şəbəkə sıxlığını və çayların sululuğunu müəyyən edən əsas amil olsa da, yeganə amil deyil. Belə ki, Kiçik Qafqaz təbii vilayəti ərazisində axan çayların çay şəbəkə sıxlığına, onların axım kəmiyyətinə onun illik rejiminə bir sıra amillər təsir edir ki, onların içərisində əsas yeri ərazinin relyefi, burada mövcud dağların yerləşmə istiqaməti, səthin meyillik dərəcəsi, hövzənin geoloji quruluşu, çay hövzələrinin landşaft xüsusiyyətləri, atmosfer yağıntıları, yeraltı sular, havanın temperaturu və rütubətliyi tutur.

Hər bir ərazinin çaylarının qidalanma şəraiti və axımın əmələgəlmə prosesi adətən onun sutoplayıcı hövzə sahəsinin yüksəkliyi ilə müəyyən olunur. Çay hövzəsinin yüksəklik amplitudu nə qədər çox olarsa, ərazinin iqlimi və axımın il ərzində paylanması bir o qədər müxtəlif olar. Kiçik Qafqaz da dağlıq ərazisi olduğundan burada bu qanunauyğunluq çox əhəmiyyətli rola malikdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, respublikamızın digər regionlarından fərqli olaraq bu ərazidə çay şəbəkəsi bir qədər sıx inkişaf etmişdir. Belə ki, Azərbaycan Respublikası ərazisində çay şəbəkəsinin orta sıxlığı $0,39 \text{ km/km}^2$ olduğu halda, Kiçik Qafqazda bu rəqəm $0,43 \text{ km/km}^2$ -ə bərabərdir. Lakin Kür çayının sağ qolları üçün bu rəqəm $0,47 \text{ km/km}^2$, Araz çayının sol qolları hövzəsində isə daha aşağı, $0,32 \text{ km/km}^2$ olmaqla fərqlənir [8, s.17].

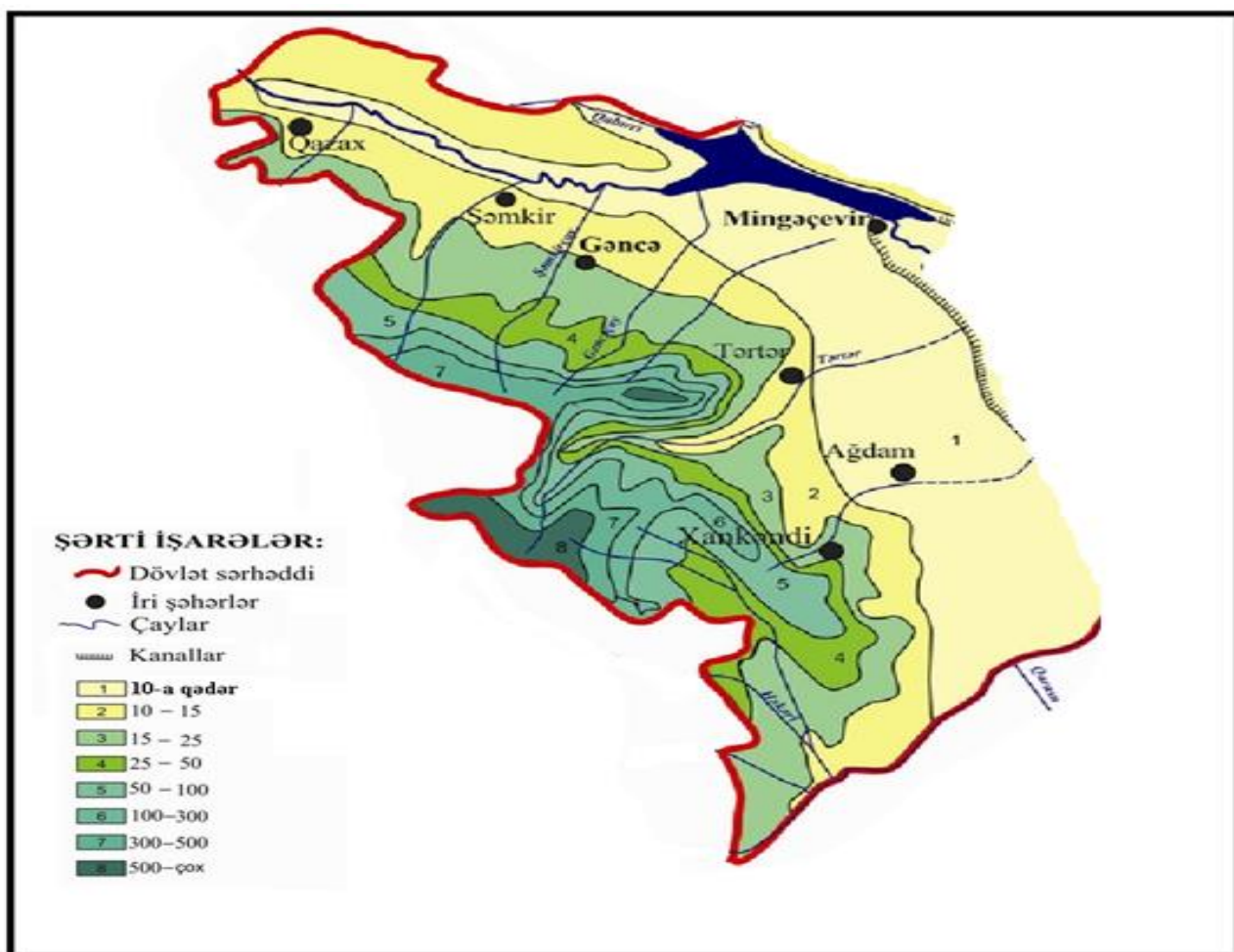
Təbii vilayətdə çay şəbəkəsinin sıxlığı yüksəklik zonaları üzrə kəskin fərqlənir. Ərazidə düzənlik bölgələrindən dağlara doğru getdikcə çay şəbəkəsinin sıxlığı artaraq özünün maksimal həddinə əsasən orta dağlıq qurşaqla çatır. Bu qurşaqlardan aşağı və yuxarı çay şəbəkəsinin sıxlığı azalmağa başlayır. Belə ki, Qarabağ silsiləsində 2500 m – dən yuxarı çay şəbəkəsinin sıxlığı hər km^2 -ə $0,30\text{-}0,40 \text{ km}$ düşdüyü halda, 2500-1000 m yüksəklik qurşağına $1,00\text{-}1,75 \text{ km}$, 1000-500 m yüksəklik qurşağında $0,10\text{-}0,20 \text{ km}$, 500 m-dən aşağı $0,05\text{-}0,10 \text{ km}$ düşür. Zəngəzur və Dərələyəzdə bu rəqəm müvafiq olaraq $0,40\text{-}0,60 \text{ km}$, $0,80\text{-}1,00 \text{ km}$, $0,20\text{-}0,40 \text{ km}$ və $0,05\text{-}0,20 \text{ km}$ nisbətində dəyişilir [2, s.168].

Göründüyü kimi ən yüksək çay şəbəkəsinin sıxlığı 2500-1000 m ($1,00\text{-}1,75 \text{ km/km}^2$) intervalında müşahidə olunur, bundan aşağı və yuxarıda çay şəbəkəsinin sıxlığı zəif inkişaf etmişdir. Ən aşağı sıxlıq isə 500 m-dən aşağı yüksəklik qurşağına düşür.

Ərazi çaylarının sululuğu isə əksinə, yuxarı qalxdıqca artır və Kiçik Qafqazın şimal – şərq yamacı ərazisində 3000 m yüksəklikdə bu rəqəm 20 L/s. km^2 -ə çatır, şimal-qərbdən cənub-şərqə doğru getdikcə aşağı düşərək axım modulu 6 L/s.km^2 -ə yaxın olur. Bunun əsas səbəbi ərazi çaylarının mənsəbindən mənbəyinə doğru getdikcə relyef xüsusiyyətləridir [7, s.75].

S.H.Rüstəmov Azərbaycan Respublikası ərazisində axan çayları rejim xüsusiyyətləri və qida mənbələrinə görə 4 qrupa bölür [6, s.79-81].

Kiçik Qafqaz təbii vilayəti ərazisində axan çaylar rejim xüsusiyyətinə əsasən dördüncü qrupa aid edilir və ərazi çaylarının illik axımının $65\text{-}70\%$ -ni yeraltı sular təşkil edir ki, bu da onun geoloji quruluşu-süxurların sukeçirmə qabiliyyəti ilə əlaqədardır. Müqayisə üçün qeyd etmək lazımdır ki, Azərbaycanın yerli çayları üçün bu rəqəm $42,2\%$ təşkil edir. Bunun başlıca səbəbi əraziyə düşən atmosfer yağıntıları sularının vulkanik süxurlara hoparaq nəticədə yer səthinə çıxan bulaqların bol suları ilə əlaqədardır. Belə bir vəziyyət ərazi çayların axımının il boyu tənzimlənməsində əhəmiyyətli rol oynayır. Bu da çay suyundan istifadə baxımından daha əlverişli hesab olunur (şəkil 2).



Şəkil 2. Kiçik Qafqaz çaylarının illik yeraltı axımı, mm-lə

Lakin orta dağlıq qurşaqlarında və ondan aşağı çayların axımında və gursululuğun formalaşmasında yeraltı sularla yanaşı yağış və qar suları da əhəmiyyətli rol oynayırlar. Demək olar ki, Kiçik Qafqazın bütün çayları yaz – yay çoxsulu rejimli çaylar qrupuna aiddirlər. Yaz – yay gursululuğunu əmələ gətirən amil qar sularıdır. Axımın formalaşma zonasında (1500–2000 m) birinci qar oktyabr – noyabr aylarında düşür. Dayanıqlı qar isə ərazidə dekabr ayından aprel – may aylarına kimi olan dövrü əhatə edir. Fevraldan marta qədər havanın temperaturunun artması qarın əriməsinə səbəb olmaqla çaylarda gursulu rejimi formalaşdırır və yaz – yay gursululuğunun ən yüksək səviyyəsi may – iyunda olur. Bu zaman intensiv yağışların yağması çaylarda güclü axarların əmələ gəlməsinə səbəb olur və maksimal səviyyə əmələ gətirir. Yağış suları qar ərimə prosesi zamanı katastrofik daşqınların əmələ gəlməsinə səbəb olur və yüksək sutoplayıcıya malik olan çaylarda illik axımın 10-25 %-ini, qar suları isə 18-25 %-ini təşkil edir. Ərazinin alçaq sutoplayıcıya malik olan çaylarda meşənin olmaması və bitki örtüyünün zəif olması yağış suyunun yerə hopmadan axmasına şərait yaradır ki, bu da nəticədə belə çaylarda yağış sularının payını 50-60%-ə qədər qaldırır. Kiçik qafqazın yüksək sutoplayıcılarda qar suları Kürün sağ qollarında 25-40%, Arazın sol qollarında isə bu rəqəm orta çoxillik axımın 30%-ni təşkil edir. Bəzi çaylarda bu rəqəm 45%-dən (Oxçuçay 48%) yüksək olur. Buna görə də yüksək dağlıqda ən gürsulu dövr iyunda müşahidə olunduğu halda Şahdağ silsiləsindən axan çaylarda bu may ayında baş verir.

Bu qida mənbələrinin nisbəti ildən-ilə və hövzənin yüksəklik qurşaqlarına görə dəyişilir. Nəticədə ayrı-ayrı çaylarda bu fərqli olur. Məsələn regionun mühüm çayı olan Tərtərin

qidalanmasında yeraltı sular 65%, qar suları isə 31% təşkil edir və yüksəkliyə doğru getdikcə bu rəqəm dəyişir.

Qeyd etmək lazımdır ki, çayların hidroloji rejiminə böyük təsir göstərən iqlim amilləri şaquli zonallığa görə və ekspozisiyalara müvafiq olaraq dəyişir. Təbii vilayətdə hündürlükdən asılı olaraq temperatur dəyişdiyi kimi düşən yağıntıların miqdarı da müxtəlifdir. Belə ki, 200-1000 m hündürlükdə düşən yağıntıların miqdarı 290-460 mm təşkil etdiyi halda, 1000-3500 m – də isə 570-790 mm yağıntı düşür. Yağıntıların bu istiqamətdə dəyişməsi çayların axım rejiminə və onların sıxlığına öz təsirini göstərir. Bunun nəticəsidir ki, Kiçik Qafqazın şimal-şərq yamacı ərazisində orta illik axımın ən böyük kəmiyyəti yüksək dağlıqda, ən kiçik kəmiyyəti isə Gəncə - Qazax maili düzənliyində müşahidə olunur.

Göründüyü kimi Kiçik Qafqazda yüksəklik artdıqca axım 2800-3000 m-ə qədər artır və sonra zəifləməyə doğru gedir.

Çay şəbəkə sıxlığına ərazinin geoloji quruluşu (süxurların çatlılığı, məsaməliyi və s.) də təsir göstərir. Xüsusilə Kürün sağ qollarının hidroqrafik şəbəkəsi uzun geoloji dövr ərzində formalaşmışdır. Ərazinin geoloji quruluşunun səth axımına və çay şəbəkə sıxlığına təsir dərəcəsini müəyyən etmək üçün lava, tuf və başqa vulkan mənşəli süxur qatlarından təşkil olunmuş Qarabağ vulkan yaylasını, onunla eyni yüksəklikdə yerləşən və eyni miqdarda yağıntı alan, lakin geoloji quruluşuna, xüsusilə relyefinə və səth meyilliyinə görə ondan kəskin fərqlənən dağ yamacları ilə müqayisə etmək kifayətdir.

Ərazi çaylarının hidroloji rejiminə təsir edən amillərdən biri də çay hövzələrinin landşaft xüsusiyyətləridir. Kiçik Qafqaz təbii vilayətinin landşaft xəritəsinin təhlilindən görünür ki, ərazi çaylarının hövzələrində müxtəlif morfoloji vahidlər yayılmışdır. Çay hövzələrində bitki tiplərin mövcudluğu ərazinin istilik və rütubətlənmə şəraiti ilə bağlı olduğundan təbii vilayətdə çay hövzələri ərazinin landşaft tipləri ilə müəyyən edilir. Çünki çayların hidroloji rejimi başlıca olaraq, çay hövzələrinin fiziki-coğrafi şəraitindən asılıdır. Bu, “çaylar landşaftın məhsuludur” ifadəsində öz əksini tapmışdır [4, s. 23].

Qeyd olunduğu kimi ərazidə çayların hövzələrində müxtəlif məntəqələr üzrə landşaft növləri ümumi sahəyə görə çox müxtəlifdir. Belə ki, ərazi çaylarında axımın il ərzində paylanması meşələrin rolu çox böyük olduğundan çay hövzələrinin meşəlik əmsalına ciddi əhəmiyyət verilir. Çünki meşələrdə qar örtüyünün əriməsi və yağan leysan yağışlar zamanı yeraltı su ehtiyatlarının infiltrasiya nəticəsində artmasına səbəb olur ki, bu da ərazidə azsulu rejim fazasında çay axımını artırmaqla yanaşı axımın il ərzində paylanmasını tənzimləyir. Ərazidə meşəlik əmsalı artdıqca onun hidroloji rejimə təsiri özünü daha qabarıq şəkildə göstərir. Lakin son zamanlar insanların təsərrüfat fəaliyyəti nəticəsində çay hövzələrinin çox hissəsində meşələr qırılmış və nəticədə bu çayların rejiminə öz təsirini göstərmişdir.

Vilayətdə yerləşən çaylar axım xüsusiyyətlərinə görə əsasən daimi və müvəqqəti axarlı olmaqla iki qrupa bölünürlər [3, s.140].

1) Daimi çaylar - mənbələri 1200–2500 metr və daha yüksəkdə yerləşir, onların qidalanmasında qar və yağış sularından başqa yeraltı sular bütün il boyu iştirak edir.

2) Müvəqqəti çaylar - dağətəyi zonada axan və mənbəyi 1000-1200 metrədən yuxarı qalxmayan bu çayların qidalanmasında yeraltı sular çox zəif iştirak etdiyindən onlarda axım əsasən yaz və payız yağışları hesabına formalaşır.

Qeyd etmək lazımdır ki, əsasən orta dağlıqdan yuxarıda noyabr ayında və ondan sonra yağan qar, dayanıqlı qar örtüyü yaradır. Qar örtüyü aprel ayından əriməyə başlayaraq may–iyun ayında ən yüksək axım səviyyəsi yaradıb güclü axım rejiminin formalaşmasına səbəb olur.

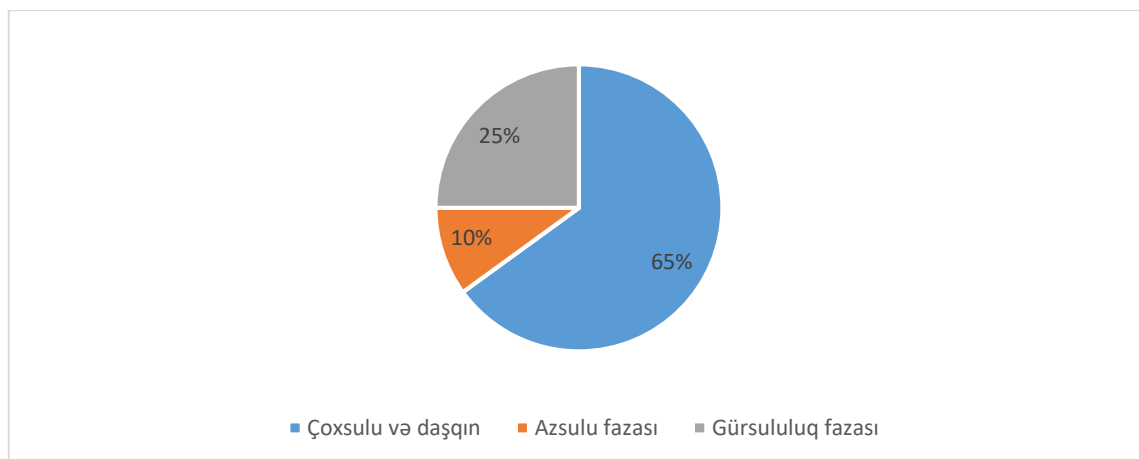
İyuldan oktyabr ayının əvvəlinə kimi çayların axım kəmiyyəti minimum səviyyəyə düşür. Oktyabr-noyabr aylarında ərazi çaylarında payız yağışları hesabına qısamüddətli gursululuq baş verir. Bundan sonra mart ayına kimi təbii vilayətin əksər çaylarında azsulu dövr müşahidə olunur [5, s.174].

Nəticədə ərəzi çayları axımın il ərzində paylanmasına görə üç fazaya bölünür:

1) Çoxsulu və ya daşqın fazası – aprel ayından iyul ayına qədərki dövrü əhatə edir. Bu dövrdə ərəzinin ümumi çay axımını illik axımın 60-65%-ni təşkil edir.

2) Az sulu fazası – avqust - oktyabr, dekabr - marta qədərki dövrü əhatə edir. Bu dövr xüsusilə noyabrın axırından marta qədər kifayət qədər dayanıqlı qış azsululuğu ilə müşahidə olunur.

3) Gursululuq dövrü – oktyabr - noyabr aylarını əhatə edir. Bu aylarda düşən yağışlar qısamüddətli daşqınlara səbəb olur ki, bunlar həcminə görə yaz-yay dövründən xeyli geridə qalır (şəkil 3).



Şəkil 3. Çaylarda axımın il ərzində paylanması, %-lə

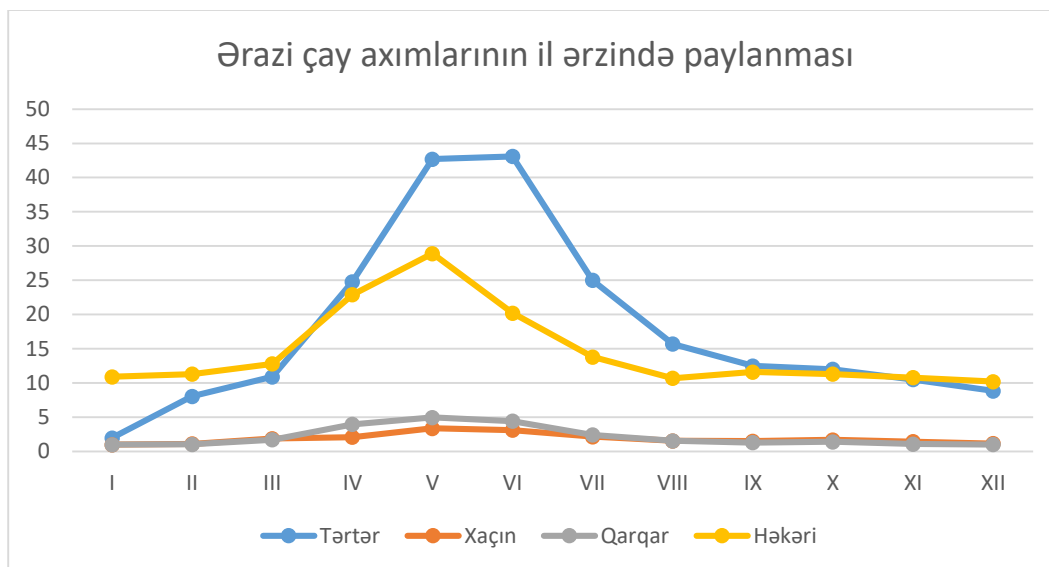
Çayların axımının ilboyu paylanmasında bu qeyri-bərabərlik təbii vilayətin mühüm çaylarında özünü daha kəskin göstərir (Cədvəl 2).

Ərazi çaylarının axımının orta çoxillik və il ərzində paylanması, m³/san

Cədvəl 2

Çaylar	Orta çoxillik	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Tərtər	18,5	1,97	8,05	10,9	24,8	42,7	43,1	25,0	15,7	12,5	12,0	10,5	8,85
Xaçın	1,93	0,99	1,11	1,89	2,09	3,38	3,13	2,17	1,56	1,52	1,69	1,45	1,16
Qarqar	2,16	1,00	1,04	1,73	3,96	4,96	4,42	2,43	1,55	1,31	1,41	1,10	1,03
Həkəri	13,4	10,9	11,3	12,8	22,9	28,9	20,2	13,8	10,7	11,6	11,3	10,8	10,2

Belə ki, Kiçik Qafqazın ən böyük çayı olan Tərtər öz başlanğıcını Konqur-Alagöz və Qarabağ silsilələrinin qovuşduğu yerdə 2120 m yüksəklikdən götürür və sutoplayıcı hövzəsinin orta yüksəkliyi 1820 m olub rejim xüsusiyyətinə görə yaz-yay aylarında daşqın əmələ gətirən çaylar qrupuna daxildir. Qidalanmasının 50-55%-ni yeraltı sular, 25-30%-ni isə qar suları tutur. Çayda gursululuq dövrü mart-aprel aylarında qarın əriməsi hesabına başlayır və ən yüksək səviyyəyə may-iyun ayında çatır. Azsulu dövr dekabr-fevral aylarını əhatə edir. Tərtər çayının axımının əsas həcmi (80%) aprel-iyul ayında, qalan hissəsi isə digər dövrlərdə keçir. Belə ki, çayda orta çoxillik axım 18,5 m³/san olduğu halda, may-iyun ayında bu rəqəm 42-43 m³/san-yə çatır (şəkil 4).



Şəkil 4.

Qış aylarında Tərtərdə orta çoxillik axım daha aşağı olub, $2 \text{ m}^3/\text{san}$ təşkil edir. Xaçınçay və Qarqar çaylarında isə qış aylarında ən aşağı axım müşahidə olunur, nəticədə dekabrda fevrala qədər bu çaylarda qış mejeni hökm sürür. Yaz-yay və payız aylarında düşən yağışlar nəticəsində Xaçın və Qarqar çaylarında çox də hündür olmayan gürsululuq əmələ gəlir ki, nəticədə bu dövrdə su sərfi $5-6 \text{ m}^3/\text{san-yə}$ çatır.

Öz başlanğıcını Mıxtökən silsiləsinin cənub-şərq yamacında yerləşən Şiştəpə dağından (3413 m) şərqdə 2580 m yüksəklikdən başlayıb Bazarçaya (Bərguşadçay) tökülən Şəlvə və Qaçarsu çaylarının qovuşmasından əmələ gələn, əsas qidasını yeraltı (62%), qar (23%), qismən (15%) yağış suları təşkil edən Həkəri çayında orta çoxillik axım $13,4 \text{ m}^3/\text{san}$, may-iyun ayında isə bu rəqəm $28-29 \text{ m}^3/\text{san}$ təşkil edir. Qış aylarında isə daha aşağı axım olub $10,8 \text{ m}^3/\text{san}$ müşahidə olunur.

Nəticə

Tədqiqat zamanı axımın formalaşmasına, su ehtiyatlarının həcmnin dəyişilməsində rol oynayan əksər amillər nəzərə alınır. Bu amillər 3 qrupa ayrılır:

1) Ərazinin səth örtüyünü təşkil edən göstəricilər. Bunlara landşaftlar, bitki örtüyünün sıxlığı, torpaq örtüyü, torpaqlardan istifadə fondu, torpaqların qranulometrik tərkibi, süxurların litologiyası və s. aiddir.

2) Morfometrik kəmiyyətlər. Bura ərazinin relyefi (hündürlüyü, meyilliyi, yamacların baxarlılığı), çay hövzəsinin sahəsi, səthin üfqi və şaquli parçalanması, çay şəbəkəsinin sıxlığı və s. daxildir.

3) İqlim və rütubətlənmə amilləri. Bunlara havanın temperaturu, atmosfer yağıntıları, faktiki və mümkün buxarlanma, rütubətlənmə əmsalı, torpaqların maksimum susaxlama qabiliyyəti, torpaqların faktiki nəmliyi, hidroloji itkilər, ilkin abstraksiya kimi onlarla faktor aid edilir.

Bu amillərin özlərinin daxilində də kəmiyyət və keyfiyyət dəyişikliklərinin tezliyini nəzərə almaqla 2 kateqoriyaya ayırmaq mümkündür: dəyişkən və dayanıqlı amillər.

1) Dəyişkən amillər – zaman-məkan daxilində kəmiyyət baxımından daha sürətli dəyişikliyə məruz qalırlar. Onlara iqlim, landşaft və torpağın rütubətlənməsi ilə bağlı olan parametrlər daxildir: yağıntı, temperatur, faktiki və mümkün buxarlanma, rütubət əmsalı, torpaqların maksimum su tutumu, torpaqların faktiki rütubətliyi, ilkin abstraksiya, landşaftlar

və torpaq fondu, bitki örtüyünün sıxlığı, torpaqların rütubətliyi, səthin üfüqi və şaquli parçalanması, çay şəbəkəsinin sıxlığı və s.

2) Dayanıqlı amillər – müəyyən zaman kəsiyində az dəyişsə də, məkan daxilində fərqli qiymətlərlə ifadə olunur. Onlara əsasən hövzənin morfometrik kəmiyyətləri (hündürlük, meyillik, yamacların baxarlılığı, hövzənin sahəsi), həmçinin torpaqların qranulometrik tərkibi, hidroloji torpaq qrupları (HSG), süxurların sukeçirmə qabiliyyəti və s. daxildir. Tədqiqat prosesində dayanıqlı amillərdən əsasən analoji bölgələrin seçilməsində, məlumatı olmayan amillərin müəyyən edilməsində istifadə olunub.

Respublikamızın digər bölgələrinə nisbətən Kiçik Qafqaz təbii vilayətində çay şəbəkəsi bir qədər sıx inkişaf etmişdir və bu yüksəklik zonaları üzrə kəskin fərqlənir. Bölgədə ən yüksək çay şəbəkəsinin sıxlığı $1,00-1,75 \text{ km/km}^2$ olmaqla 2500-1000m hündürlüklərdə inkişaf etmişdir. Ondən aşağı və yuxarıda çay şəbəkəsi zəif inkişaf etmişdir.

Ərazi çaylarının ən başlıca xüsusiyyətlərindən biri də burada yağış və qar sularının vulkanik süxurlara hoparaq yer üzərinə bol sulu bulaqlar şəklində çıxması ilə əlaqədar olaraq çayların qidasında yeraltı suların həddən artıq çox yer tutmasıdır. Xüsusilə, Kiçik Qafqazın cənub-şərq hissəsində Qarabağ yaylasından axan (Tərtər, Xaçın, Həkəri və Qarqarçay) çaylar daha şox təbii tənzimləməyə malik olub onları qidalandıran bulaq suları çay axımının 65-70%-dən çoxunu təşkil edir və yüksəkliyə doğru getdikcə bu rəqəm artır.

Qeyd etmək lazımdır ki, son 20 il ərzində global iqlim dəyişmələrinin regional təzahürləri və digər amillərin təsiri nəticəsində ərazinin çaylarında qış azsulu dövr axımının artması müşahidə olunmuş, illik axımın, daşqın və gursulu dövr axımlarının həcmi azalmaqla ümumi su ehtiyatlarında ciddi azalma müşahidə olunur. Belə ki, son 30 ildə ərazidə su ehtiyatlarında təqribən 14 % azalma müşahidə edilmişdir. Müşahidələr göstərir ki, belə davam etsə yaxın gələcəkdə təbii vilayət çaylarının axım kəmiyyəti daha 30-35% azala bilər.

Uzun geoloji dövr ərzində formalaşmış təbii vilayəti çaylarının hidroqrafik şəbəkəsi hazırda da təbii proseslər və insanların təsərrüfat fəaliyyəti nəticəsində dəyişməyə məruz qalır. Çayların üzərində, orta və aşağı hissələrində aparılan su – təsərrüfat işləri çay axımlarının və hövzənin təbii şəraitinin dəyişməsinə səbəb olur. Antropogen amillərin təsiri nəticəsində ərazi çayları, xüsusilə transsərhəd çayları ciddi sürətdə çirklənməyə məruz qalmışdır. Belə ki, işğaldan azad olmuş ərazilərin çay sularında çirklənmə indeksinin (SÇİ) qiyməti 5,0-6,0 arasında dəyişir ki, bu da ciddi sürətdə çirklənmiş hesab olunur. Bəzi çaylarda (Oxçuçay, Qarqarçay və b.) SÇİ-nin qiyməti 6-dən yuxarıdır.

Ədəbiyyat

1. Ağayev Z.B. (2023). “Lənkəran təbii vilayəti çaylarının su ehtiyatları və səmərəli istifadəsi”. Bakı: “Optimist” nəşriyyatı, 194 s.
2. Azərbaycan Respublikası Milli Atlası. (2014). Bakı: “Kartoqrafiya fabriki”, 444 s.
3. İmanov F.Ə, Qaşqay R.M., Mahmudov R.N. (2021). “Qarabağ və Şərqi Zəngəzurun daxili suları”. Qarabağ və Şərqi Zəngəzurun coğrafiyası, Bakı: “Optimist MMC” nəşriyyatı, 536 s.
4. İmanov F.Ə.Əliyeva İ.S., Quliyeva A.A. “Kiçik Qafqaz çay hövzələrinin landşaft hidroloji xüsusiyyətləri və çayların azsulu dövr axımı”. 2013. Bakı: “MBM”, 224 s.
5. Regional coğrafiya. III cild. 2015. Bakı: “Avropa” nəşriyyatı, 400 s.
6. Rüstəmov S.H. “Azərbaycan SSR-in çayları və onların hidroloji xüsusiyyətləri”. 1960. Bakı: “Elm” nəşriyyatı, 196 s.
7. Рустамов С.Г., Кашкай Р.М. “Водные ресурсы Азербайджанской ССР”. 1989. Баку: «Издательство «Элм», 180 с.
8. Рустамов С.Г., Джафаров Б.С., Гаджибеков Н.Г. «Водный баланс бассейнов рек Малого Кавказа» 1969. Баку: Издательство «Элм», 210с.

FORMATION FEATURES OF THE RIVER CURRENTS OF THE LESSER CAUCASUS NATURAL REGION

Ziyafat Agayev
Telman Bayramov
Zulfiali Rasulov
Shakira Rzayeva
Farida Soltanova

Institute of Geography named after academician Hasan Aliyev, Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan

The article analyzes the main hydrological characteristics of the rivers of the Lesser Caucasus natural region of the Republic of Azerbaijan (except for the Nakhchivan Autonomous Republic) and the factors affecting their formation. It was determined that the territorial rivers have a more natural regulation, and more than 60% of their food source is groundwater. As the average elevation of the river basins increases, groundwater nutrition increases further. It should be noted that the water resources and hydrological characteristics of the territorial rivers, along with regional climate changes, morphometric indicators of river basins, and anthropogenic factors, have also been strongly influenced by the long-term Armenian occupation of the territory. This, in turn, leads to the formation of the regime of quantitative and qualitative indicators of water in natural rivers of the province. Thus, in the last 30 years, in addition to the serious pollution of the rivers flowing in the natural province, an increase in the winter low-water period flow has been observed, and a serious decrease in the total water resources has been observed (14%) due to the decrease in the volume of the annual flow, flood and high-water period flows. Researchers show that if this continues, the flow volume of the natural provincial rivers may decrease by another 30-35% in the near future.

Keywords: hydrological characteristics, flow quantity, river flow, flow phases, river network, climate changes, regime characteristics, nutrition regime

СОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ РЕЧНОГО СТОКА В ПРИРОДНОМ РЕГИОН МАЛОГО КАВКАЗА

Зияфат Агаев
Тельман Байрамов
Зульфiali Расулов
Шакира Рзаева
Фарида Солтанова

Министерство науки и образования Азербайджанской Республики, Институт географии имени академика Гасана Алиева, Баку, Азербайджан
Лянкяранский государственный университет, Лянкяран, Азербайджан

В статье анализируются важнейшие гидрологические особенности природных рек Малокавказского региона Азербайджанской Республики (кроме Нахчыванской РР) и формирующие их факторы. Установлено, что реки района имеют более естественное регулирование и питающие их подземные воды составляют более 60% речного стока, причем с увеличением высоты эта величина увеличивается. Следует отметить, что региональные проявления глобальных изменений климата, морфометрические элементы бассейнов рек и антропогенные факторы, а также тот факт, что территория на протяжении многих лет находилась под армянской оккупацией, имели сильное влияние на водные ресурсы и гидрологические характеристики рек территории. Такая ситуация вызвала серьезные изменения качества воды и режима рек, а их естественные законы были нарушены. Таким образом, за последние 30 лет региональные реки, протекающие в природной области, подвергаются серьезному загрязнению, а также увеличению стока зимней межени, объема годового стока, паводковых вод. Стоки в тяжелые периоды уменьшились, наблюдается серьезное (14%) сокращение общих водных ресурсов. Если так будет продолжаться, то в ближайшее время скорость стока естественных региональных рек может снизиться на 30-35%.

Ключевые слова: гидрологические характеристики, объем стока, речной сток, фазы стока, речная сеть, изменения климата, режимные характеристики, режим питания

ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ СЛАГАЕМОМ И ИЗМЕРИМЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

Натиг Ибрагимов

Габил Ягуб

Туба Улкер

Карсский Кавказский Университет, Карс, Турция

Лянкяранский государственный университет, Лянкяран, Азербайджан

э-почта: gabilya@mail.ru

э-почта: natiq_ibrahimov@mail.ru

DOI: 10.30546/2960-1975.2025.1.056

Аннотация. В данной работе рассматривается вторая начально-краевая задача для нелинейного одномерного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с измеримым ограниченным комплексным потенциалом, зависящим только от времени. При этом с помощью метода Галеркина доказывается теорема о существовании и единственности решения рассматриваемой второй начально-краевой задачи.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, градиентное слагаемое, комплексный потенциал, метод Галеркина

1. Введение

Начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники и изучение этих задач носит как теоретический, так и практический интересы [1–3]. Начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнений без специального градиентного слагаемого ранее изучены, например, в работах [4–10] и др., а со специальным градиентным слагаемым, например, в работах [12–20] и др. Во всех этих работах от коэффициентов уравнения Шредингера, зависящих от временной переменной, потребовались дифференцируемость по временной переменной. Следует отметить, что начально-краевые задачи для нестационарного уравнения Шредингера без специального градиентного слагаемого, когда коэффициенты зависят только от временной переменной и являются измеримыми ограниченными функциями ранее изучены в работе [10]. Подобная вторая начально-краевая задача для линейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящим только от временной переменной, ранее изучена в работе [11]. Однако начально-краевые задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящим только от временной переменной почти не изучены. Поэтому изучение разрешимости второй начально-краевой задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда вещественные и мнимые части комплексного потенциала являются измеримыми ограниченными функциями, зависящими только от временной переменной представляет немалый научный и практический интерес.

2. Постановка задачи

Пусть $l > 0$, $T > 0$ - заданные числа, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, $\Omega_t \equiv (0, l) \times (0, t)$, $\Omega = \Omega_T$; $C^k([0, T], B)$ - банахово пространство функций, k -раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_p(0, l)$ -лебегово пространство функций, суммируемых по модулю на промежутке $(0, l)$ со степенью $p \geq 1$; $L_2(0, T; B)$ - банахово пространство функций, определенных и суммируемых по модулю с квадратом на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_\infty(0, T; B)$ - банахово пространство измеримых ограниченных на $(0, T)$ функций со значениями в банаховом пространстве B ; Соболевы пространства $W_p^k(0, l)$, $W_p^{k, m}(\Omega)$ $p \geq 1$, $k \geq 0$, $m \geq 0$, определены, например, в работах [21–23].

Рассмотрим следующую вторую начально-краевую задачу об определении функции $\psi = \psi(x, t)$ из условий:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + v_0(t) \psi + i v_1(t) \psi + a_2 |\psi|^2 \psi = f(x, t), (x, t) \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, l), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0, T),$$

(2.3)

где $i = \sqrt{-1}$; $a_0 > 0$ - заданное число; a_2 - комплексное число, удовлетворяющее условиям:

$$a_2 = \operatorname{Re} a_2 + i \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Im} a_2 > 0, \operatorname{Re} a_2 < 0, \operatorname{Im} a_2 \geq 2 |\operatorname{Re} a_2|;$$

(2.4)

$a(x), a_1(x, t), v_0(t), v_1(t)$ - измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\mu_0 \leq a(x) \leq \mu_1, \left| \frac{da(x)}{dx} \right| \leq \mu_2, \left| \frac{d^2 a(x)}{dx^2} \right| \leq \mu_3, \quad \forall x \in (0, l), \quad \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 = \text{const} > 0; \quad (2.5)$$

$$|a_1(x, t)| \leq \mu_4, \left| \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} \right| \leq \mu_5, \left| \frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial x^2} \right| \leq \mu_6, \quad \forall (x, t) \in \Omega,$$

$$a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, \quad \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6 = \text{const} > 0;$$

(2.6)

$$|v_s(t)| \leq b_s, \quad s = 0, 1, \quad \forall t \in (0, T), \quad b_0, b_1 = \text{const} > 0; \quad (2.7)$$

$\varphi(x), f(x, t)$ - комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^2(0, l), \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0; \quad (2.8)$$

$$f \in W_2^{2,0}(\Omega), \frac{\partial f(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial f(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T);$$

(2.9)

Символ $\forall^0$ означает “при почти всех”.

Определение 2.1. Под решением второй начально-краевой задачи (2.1)-(2.3) будем понимать функцию $\psi = \psi(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) для почти всех $(x, t) \in \Omega$, а начальному условию (2.2) для почти всех $x \in (0, l)$ и краевым условиям (2.3) для почти всех $t \in (0, T)$.

3. Разрешимость второй начально-краевой задачи.

В этом разделе используя метод Галеркина будем доказывать теорему о существовании и единственности решения рассматриваемой второй начально-краевой задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 3.1. Пусть число a_2 и функции $a(x)$, $a_1(x, t)$, $\varphi(x)$, $f(x, t)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.9). Тогда редуцированная задача (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ имеет единственное решение из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right),$$

(3.1)

где $c_0 > 0$ - постоянная

Доказательство. Возьмем какую-либо фундаментальную в $W_2^2(0, l)$ и ортонормированную в $L_2(0, l)$ систему функций $u_k = u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, например, систему собственных функций следующей спектральной задачи:

$$LX(x) = \lambda X(x), x \in (0, l), X'(0) = X'(l) = 0$$

(3.2)

при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, где оператор L определяется формулой:

$$L = -a_0 \frac{d^2}{dx^2} + a(x). \quad (3.3)$$

Можем отметить, что спектральная задача (3.2) является спектральной задачей, изученной в работе [21]. Поэтому с помощью результатов этой работы можем утверждать, что спектральная задача (3.2) имеет нетривиальные решения $X = u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, образующих спектр задачи и эти решения образуют базис в пространствах $W_2^1(0, l)$, $W_2^2(0, l)$, и справедливы условия ортонормированности в $L_2(0, l)$ и ортогональности в $W_2^1(0, l)$, $W_2^2(0, l)$ в следующем виде:

$$(u_k, u_m)_{L_2(0, l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x) dx = \delta_k^m, \quad (3.4)$$

где δ_k^m символы Кронекера:

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad k, m = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Ясно, что функции $u_k(x), k = 1, 2, \dots$ ортогональны и в следующем смысле:

$$\begin{aligned} [u_k, u_m] &= (Lu_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l \left(a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} + a(x) u_k u_m \right) dx = \\ &= \lambda_k \delta_k^m, \quad k, m = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(l)} = \lambda_k^2 \delta_k^m, \quad k, m = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

В силу предположения $a(x) \geq \mu_0 > 0$ все собственные значения $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ вещественны, положительны и расположены в порядке возрастания:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Наряду с этими предположим, что

$$\|u_k\|_{W_2^1(0,l)} \leq \tilde{d}_k < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

где $\tilde{d}_k, k = 1, 2, \dots$ - положительные постоянные.

По методу Галеркина приближенное решение будем искать в виде:

$$\psi^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) u_k(x), \quad (3.10)$$

где $c_k^N(t) = (\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)}, k = 1, 2, \dots, N$ определяются из условий:

$$\begin{aligned} & i \frac{d}{dt} (\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} - (L\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} + i \left(a_1(\cdot, t) \frac{\partial \psi^N(\cdot, t)}{\partial x}, u_k \right)_{L_2(0,l)} + \\ & + (v_0(t) \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} + i (v_1(t) \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} + \left(a_2 |\psi^N(\cdot, t)|^2 \psi^N(\cdot, t), u_k \right)_{L_2(0,l)} = f_k(t), \\ & k = 1, 2, \dots, N, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$c_k^N(0) = (\psi^N(\cdot, 0), u_k)_{L_2(0,l)} = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.12)$$

Здесь $f_k(t) = (f(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)}, \varphi_k = (\varphi, u_k)_{L_2(0,l)}, k = 1, 2, \dots, N$.

Система (3.11) есть нечто иное, как система N нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и с правой частью $f_k \in L_2(0, T)$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что задача Коши (3.11), (3.12) имеет хотя бы одно обобщенное решение из пространства $W_2^1(0, T)$ (см: например, [24–26]).

Теперь установим оценку для решения этой задачи Коши.

Лемма 3.1. Для решения системы (3.11), (3.12) верна оценка:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{k=1}^N |c_k^N(t)|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left| \frac{dc_k^N(t)}{dt} \right|^2 dt \leq \|\psi^N\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^{2,0}(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0,l)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T], N=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Доказательство леммы. Умножим каждое k -ое уравнение из (3.11) на свое $\bar{c}_k^N(t)$, полученные равенства просуммируем по k от 1 до N и проинтегрируем по t от нуля до $t \leq T$. В результате, используя формулу интегрирования по частям и условию $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0, k=1, 2, \dots$, имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N - a_0 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + i a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \bar{\psi}^N - a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + \\ & + \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) |\psi^N|^2 + i v_1(\tau) |\psi^N|^2 + a_2 |\psi^N|^4 \right) dx d\tau = \int_{\Omega_t} f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение и в полученном равенстве используя дифференцируемость функции $a_1(x, t)$, получим справедливость равенства:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} |\psi^N|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau = \\ & = \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |\psi^N|^2 dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |\psi^N|^2 dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} (f \bar{\psi}^N) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ввиду того, что функция $a_1(x, t)$ удовлетворяют однородным граничным условиям $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$, второе слагаемое равняется нулю. С учетом этого и условий на коэффициенты уравнения из равенства (3.14) нетрудно получить справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} & \|\psi^N(., t)\|_{L_2(0,l)}^2 + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau \leq \|\psi^N(., 0)\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ & + (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_0^t \|\psi^N(., \tau)\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Используя формулу (3.10) можем написать следующее соотношение:

$$\|\psi^N(., 0)\|_{L_2(0,l)}^2 = \sum_{k=1}^N |c_k^N(0)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 = \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2. \quad (3.16)$$

С помощью этого соотношения из (3.15) получим справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} & \|\psi^N(., t)\|_{L_2(0,l)}^2 + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau \leq \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ & + (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_0^t \|\psi^N(., \tau)\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отсюда в силу неотрицательности второго слагаемого левой части этого неравенства имеем:

$$\begin{aligned} \|\psi^N(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq \|\phi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_0^t \|\psi^N(.,\tau)\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

С помощью этого неравенства и леммы Гронуолла нетрудно получить справедливость оценки:

$$\|\psi^N(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 \leq c_2 \left(\|\phi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T].$$

(3.18)

В силу этой оценки из неравенства (3.17) можем установить справедливость следующей оценки:

$$\|\psi^N(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_\tau} |\psi^N|^4 dx d\tau \leq c_3 \left(\|\phi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.19)$$

Теперь оценим $\frac{\partial \psi^N}{\partial x}$. С этой целью и умножим k -ое уравнение системы (3.11) на свое $\lambda_k \bar{c}_k^N(t)$, а потом полученные уравнения просуммируем по k от 1 до N . Тогда, полученное равенство проинтегрируя по интервалу $(0, t)$ имеем:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} L \bar{\psi}^N - |L \psi^N|^2 + i a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau + \\ &+ \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N + i v_1(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N + a_2 |\psi^N|^2 \psi^N L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau = \\ &= \int_{\Omega_t} f(x, \tau) L \bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.20)

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение, имеем:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} \left(i \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t} L \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} L \psi^N \right) + i a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} L \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} L \psi^N \right) \right) dx d\tau + \\ &+ \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) (\psi^N L \bar{\psi}^N - \bar{\psi}^N L \psi^N) + i v_1(\tau) (\psi^N L \bar{\psi}^N + \bar{\psi}^N L \psi^N) \right) dx d\tau + \\ &+ \int_{\Omega_t} \left(a_2 |\psi^N|^2 \psi^N L \bar{\psi}^N - \bar{a}_2 |\bar{\psi}^N|^2 \bar{\psi}^N L \psi^N \right) dx d\tau = \\ &= \int_{\Omega_t} \left(f(x, \tau) L \bar{\psi}^N(x, \tau) - \bar{f}(x, \tau) L \psi^N(x, \tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.21)

Используя формулу (3.3) для оператора L и формулу интегрирования по частям, а

также граничные условия $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) \right) dx d\tau = \int_{\Omega_t} \left(a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + a(x) \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N \right) dx d\tau, \quad (3.22) \\ &\int_{\Omega_t} i a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L \bar{\psi}^N dx d\tau = \int_{\Omega_t} \left(i a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) \right) dx d\tau = \end{aligned}$$

$$= - \int_{\Omega_t} i a_0 a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} dx d\tau + \int_{\Omega_t} i a(x) a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \bar{\psi}^N dx d\tau, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N + i v_1(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau = \\ & = \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) \psi^N \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) + i v_1(\tau) \psi^N \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) \right) dx d\tau = \\ & = \int_{\Omega_t} \left(a_0 v_0(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + v_0(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + \\ & + \int_{\Omega_t} \left(i a_0 v_1(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + i v_1(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau, \end{aligned}$$

(3.24)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left(a_2 |\psi^N|^2 \psi^N L \bar{\psi}^N - \bar{a}_2 |\psi^N|^2 \bar{\psi}^N L \psi^N \right) dx d\tau = 2i \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ & + i a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau + \\ & + a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau, \end{aligned}$$

(3.25)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} f(x, \tau) L \bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau = \int_{\Omega_t} f(x, \tau) \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N(x, \tau) \right) dx d\tau = \\ & = \int_{\Omega_t} \left(a_0 \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x} + a(x) f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.26) \end{aligned}$$

С учетом этих равенств (3.22) - (3.26) из равенства (3.21) получим справедливость следующего равенства:

$$\begin{aligned} & i \int_{\Omega_t} a_0 \left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial t \partial x} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right) dx d\tau + i \int_{\Omega_t} a(x) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \psi^N \right) dx d\tau - \\ & - i \int_{\Omega_t} a_0 a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right) dx d\tau + \\ & + i \int_{\Omega_t} a(x) a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} \psi^N \right) dx d\tau + \\ & + 2i \int_{\Omega_t} \left(a_0 v_1(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + v_1(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + 2i \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ & + i a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau + \\ & + a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau = \end{aligned}$$

$$= 2i \int_{\Omega_t} a_0 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x} \right) dx d\tau + \\ + 2i \int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Im} \left(f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

(3.27)

Ясно, что справедливы следующие равенства:

$$ia_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau = \\ = i4a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + i2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left[\left(\psi^N \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau,$$

(3.28)

$$a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau = \\ = i2a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left[\left(\bar{\psi}^N \right)^2 \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau. \quad (3.29)$$

С помощью этих формул из равенства (3.27) нетрудно получить следующее равенство:

$$\int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} a(x) \frac{\partial}{\partial t} |\psi^N|^2 dx d\tau - \\ - \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\ + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) a_1(x, \tau) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau - \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} (a(x) a_1(x, \tau)) |\psi^N|^2 dx d\tau + \\ + 2 \int_{\Omega_t} \left(a_0 v_1(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + v_1(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ + 4a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + 2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left[\left(\psi^N \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau + \\ + 2a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left[\left(\bar{\psi}^N \right)^2 \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau = \\ = 2 \int_{\Omega_t} a_0 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x} \right) dx d\tau + \\ + 2 \int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Im} \left(f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

(3.30)

В силу условий $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$ третье и пятое слагаемые левой части этого равенства равняются нулю. С учетом этого из последнего равенства нетрудно установить справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned}
 & a_0 \int_0^l \left| \frac{\partial \psi^N(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx + \int_0^l a(x) |\psi^N(x, t)|^2 dx + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^4 dx d\tau + \\
 & + 4a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau \leq a_0 \int_0^l \left| \frac{\partial \psi^N(x, 0)}{\partial x} \right|^2 dx + \int_0^l a(x) |\psi^N(x, 0)|^2 dx + \\
 & + a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left(a(x) \left| \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \right| + \left| \frac{da(x)}{dx} \right| a_1(x, \tau) \right) |\psi^N|^2 dx d\tau + \\
 & + 2 \int_{\Omega_t} \left(a_0 |v_1(\tau)| \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + a(x) |v_1(\tau)| |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + \\
 & + 2a_0 (\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + 2a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial x} \right| dx d\tau + \\
 & + 2 \int_{\Omega_t} a(x) |f(x, \tau)| |\psi^N(x, \tau)| dx d\tau, \forall t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

С помощью условия (2.5) и условий на коэффициенты уравнения, а также неравенства Коши-Буняковского из этого равенства нетрудно получить справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned}
 & a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(., t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 + \mu_0 \|\psi^N(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 + 2\mu_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau + \\
 & + a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau \leq a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(., 0)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 + \mu_1 \|\psi^N(., 0)\|_{L_2(0, l)}^2 + \\
 & + a_0 (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + (\mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_5 + 2\mu_1 b_1 + \mu_1) \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 dx d\tau + \\
 & + a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \mu_1 \int_{\Omega_t} |f(x, \tau)|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

(3.31)

С помощью формулы (3.10) нетрудно установить справедливость неравенства:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(., 0)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_4 \|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^2. \quad (3.32)$$

В силу этого неравенства и соотношения (3.16), а также оценки (3.19) из неравенства (3.31) получим справедливость неравенства:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(., t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 + 2 \frac{\mu_0}{a_0} \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau \leq$$

$$\leq c_5 \left(\|\phi\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^2 \right) + c_6 \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

(3.33)

Из этого неравенства имеем:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 \leq c_7 \left(\|\phi\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^2 \right) + c_8 \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

Отсюда с помощью леммы Гронуолла получим справедливость следующей оценки:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 \leq c_9 \left(\|\phi\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.34)$$

В силу этой оценки из неравенства (3.33) установим оценку:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 + 2 \frac{\mu_0}{a_0} \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau \leq \\ \leq c_{10} \left(\|\phi\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.35)

Теперь оценим $\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2}$. С этой целью и умножим k -ое уравнение системы (3.11) на свое $\lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t)$, а потом полученные уравнения просуммируем по k от 1 до N . Тогда, имеем:

$$\begin{aligned} i \sum_{k=1}^N \int_0^l \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t} u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) - \sum_{k=1}^N \int_0^l L \psi^N(x,t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \\ + i \sum_{k=1}^N \int_0^l a_1(x,t) \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial x} u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \sum_{k=1}^N \int_0^l v_0(t) \psi^N(x,t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \\ + i \sum_{k=1}^N \int_0^l v_1(t) \psi^N(x,t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \sum_{k=1}^N \int_0^l a_2 |\psi^N(x,t)|^2 \psi^N(x,t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) = \\ = \sum_{k=1}^N \int_0^l f(x,t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t). \end{aligned}$$

В этом равенстве используя равенство $Lu_k = \lambda_k u_k$ и с помощью формулы интегрирования по частям преобразуем каждый интеграл этого равенства. Тогда в полученном равенстве используя формулу (3.10) после интегрирования по t от нуля до $t \leq T$ получим справедливость равенства:

$$\begin{aligned} i \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (L \psi^N) L \bar{\psi}^N dx d\tau - \int_{\Omega_t} L (L \psi^N) L \bar{\psi}^N dx d\tau + i \int_{\Omega_t} L \left(a_1(x,\tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right) L \bar{\psi}^N dx d\tau + \\ + \int_{\Omega_t} v_0(\tau) |L \psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L \psi^N|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} L (a_2 |\psi^N|^2 \psi^N) L \bar{\psi}^N dx d\tau = \\ = \int_{\Omega_t} L f(x,\tau) L \bar{\psi}^N(x,\tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.36)

Теперь в этом равенстве преобразуем второе, третье и шестое слагаемые левой части. С помощью формулы:

$$L(L\psi^N) = -a_0 \frac{\partial}{\partial x^2} (L\psi^N) + a(x) L\psi^N$$

(3.37)

и формулы интегрирования по частям можем написать следующее равенство:

$$\int_{\Omega_t} L(L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau = \int_{\Omega_t} a_0 \left| \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} a(x) |L\psi^N|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

(3.38)

Для преобразования третьего слагаемого левой части равенства (3.36) сначала преобразуем подинтегральное выражение $L\left(a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right)$. С помощью формулы оператора L имеем:

$$\begin{aligned} L\left(a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right) &= -a_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right) + a(x) a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} = \\ &= -a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} - 2a(x) \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} \psi^N - a_1(x, t) \frac{da(x)}{dx} \psi^N + \\ &\quad + 2 \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} L\psi^N + a_1(x, t) \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Теперь преобразуем шестое слагаемое. С помощью формулы оператора L имеем:

$$\begin{aligned} L\left(a_2 |\psi^N|^2 \psi^N\right) &= -a_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a_2 |\psi^N|^2 \psi^N\right) + a_2 a(x) |\psi^N|^2 \psi^N = \\ &= 2a_2 |\psi^N|^2 L\psi^N - a_2 a(x) |\psi^N|^2 \psi^N - 4a_0 a_2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \psi^N - 2a_0 a_2 \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N. \end{aligned}$$

(3.40)

Тогда с помощью формул (3.38) - (3.40) равенство (3.36) можем написать в виде:

$$\begin{aligned} &i \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau - \int_{\Omega_t} a_0 \left| \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) \right|^2 dx d\tau - \int_{\Omega_t} a(x) |L\psi^N|^2 dx d\tau - \\ &- i \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N dx d\tau - i \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} + a_1(x, t) \frac{da(x)}{dx} \right) \psi^N L\bar{\psi}^N dx d\tau + \\ &\quad + i \int_{\Omega_t} 2 \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau + \\ &\quad + \int_{\Omega_t} v_0(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau + 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau + \\ &\quad + 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau - a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 \psi^N L\bar{\psi}^N dx d\tau - 4a_0 a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \psi^N L\bar{\psi}^N dx d\tau - \\ &\quad - 2a_0 a_2 \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N L\bar{\psi}^N dx d\tau = \int_{\Omega_t} Lf(x, \tau) L\bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.41)

Вычитывая из этого равенства его комплексное сопряжение имеем:

$$\begin{aligned}
& i \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial t} (L\bar{\psi}^N) L\psi^N \right) dx d\tau + \\
& + 4i \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial x} (L\bar{\psi}^N) L\psi^N \right) dx d\tau - \\
& - i \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} L\psi^N \right) dx d\tau - \\
& - i \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} + a_1(x, t) \frac{da(x)}{dx} \right) (\psi^N L\bar{\psi}^N + \bar{\psi}^N L\psi^N) dx d\tau + \\
& + 2i \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau + 4i \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau - \\
& - 2i \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 \operatorname{Re}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau - 2i \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 \operatorname{Im}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau - \\
& - 8ia_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \operatorname{Re}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau - 8ia_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \operatorname{Im}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau - \\
& - 4ia_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left(\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N L\bar{\psi}^N \right) dx d\tau - 4ia_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N L\bar{\psi}^N \right) dx d\tau = \\
& = 2i \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} (Lf(x, \tau) L\bar{\psi}^N(x, \tau)) dx d\tau, \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

(3.42)

Теперь в этом равенстве преобразуем третье слагаемое левой части. Ясно, что имеет место равенство:

$$\begin{aligned}
i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial x} (L\bar{\psi}^N) L\psi^N \right) dx d\tau &= i \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) |L\psi^N|^2 \right) dx d\tau - \\
&- i \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Если учесть это равенство в левой части равенства (3.42), то получим справедливость равенства, из которого в силу условий $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$ устанавливаем справедливость следующего равенства:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l |L\psi^N(x, t)|^2 dx - \int_0^l |L\psi^N(x, 0)|^2 dx + \\
& + 3 \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N \right) dx d\tau - \\
& - 2 \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} + a_1(x, t) \frac{da(x)}{dx} \right) \operatorname{Re}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau + \\
& + 2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau + 4 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau - \\
& - 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 \operatorname{Re}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau - 2 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 \operatorname{Im}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -8a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \operatorname{Re}(\psi^N L \bar{\psi}^N) dx d\tau - 8a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \operatorname{Im}(\psi^N L \bar{\psi}^N) dx d\tau - \\
 & -4a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left(\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau - 4a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau = \\
 & = 2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} (L f(x, \tau) L \bar{\psi}^N(x, \tau)) dx d\tau, \forall t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

(3.44)

Используя формулу $L\psi^N(x, 0) = \sum_{k=1}^N c_k^N(0) Lu_k(x)$ и условие (3.12) имеем:

$$L\psi^N(x, 0) = \sum_{k=1}^N c_k^N(0) Lu_k(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k Lu_k(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k u_k(x). \quad (3.45)$$

С другой стороны можем написать следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k u_k(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_0^l \varphi(\xi) u_k(\xi) d\xi u_k(x) = \sum_{k=1}^N \int_0^l \varphi(\xi)(x) Lu_k(\xi) d\xi u_k(x).$$

С помощью интегрирования по частям имеем:

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k u_k(x) = \sum_{k=1}^N \int_0^l L\varphi(\xi)(x) u_k(\xi) d\xi u_k(x).$$

Учитывая это равенство в равенстве (3.45) получим следующее равенство:

$$L\psi^N(x, 0) = \sum_{k=1}^N \int_0^l L\varphi(\xi)(x) u_k(\xi) d\xi u_k(x) = \sum_{k=1}^N (L\varphi)_k u_k(x) \quad (3.46)$$

В силу этой формулы нетрудно установить справедливость соотношения:

$$\|L\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(0, l)}^2 = \sum_{k=1}^N |(L\varphi)_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(L\varphi)_k|^2 = \|L\varphi\|_{L_2(0, l)}^2.$$

Из этого соотношения и вида оператора L можем установить справедливость неравенства:

$$\|L\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_{11} \|\varphi\|_{W_2^2(0, l)}^2.$$

(3.47)

С учетом этого соотношения из равенства (3.44) можем получить справедливость неравенства:

$$\begin{aligned}
 & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + 4 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq c_{11} \|\varphi\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \\
 & + 3 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \right| |L\psi^N|^2 dx d\tau + 2a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \right| \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right| |L\psi^N| dx d\tau + \\
 & + 2 \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \left| \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} \right| + |a_1(x, t)| \left| \frac{da(x)}{dx} \right| \right) |\psi^N| |L\psi^N| dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} |v_1(\tau)| |L\psi^N|^2 dx d\tau + \\
 & + (2 \operatorname{Im} a_2 + 2 |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 |L\psi^N| dx d\tau + \\
 & + (12a_0 \operatorname{Im} a_2 + 12a_0 |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 |\psi^N| |L\psi^N| dx d\tau +
 \end{aligned}$$

$$+2 \int_{\Omega_t} |Lf(x, \tau)| |L\psi^N(x, \tau)| dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

(3.48)

Используя условия на коэффициенты уравнения, применяя неравенство Коши-Буняковского и условий (2.5), а также неравенство Коши с ε и с выбором $\varepsilon = \frac{1}{6a_0}$ из этого неравенства имеем:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq c_{11} \|\phi\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \\ & + (3\mu_5 + a_0\mu_6 + 2\mu_1\mu_5 + \mu_2\mu_4 + 2b_1 + 1) \int_{\Omega_t} |L\psi^N|^2 dx d\tau + \\ & + a_0\mu_6 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + (2\mu_1\mu_5 + \mu_2\mu_4) \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 dx d\tau + \frac{3}{2} \operatorname{Im} a_2 \mu_1^2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ & + 54a_0^2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^4 dx d\tau + \int_{\Omega} |Lf(x, \tau)|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

В силу известного неравенства (см. [21], стр. 78) можем написать следующее неравенство:

$$\int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^4 dx d\tau \leq \beta \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, l)} \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^3 d\tau, \forall t \in [0, T], \quad (3.50)$$

где $\beta > 0$ - некоторая постоянная. Применяя в правой части этого неравенства неравенство Коши-Буняковского имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^4 dx d\tau \leq \frac{\beta}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau + \frac{\beta}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^6 d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.51)$$

С учетом этого неравенства из (3.49) получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq c_{11} \|\phi\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \\ & + (3\mu_5 + a_0\mu_6 + 2\mu_1\mu_5 + \mu_2\mu_4 + 2b_1 + 1) \int_{\Omega_t} |L\psi^N|^2 dx d\tau + \\ & + a_0\mu_6 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + (2\mu_1\mu_5 + \mu_2\mu_4) \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 dx d\tau + \frac{3}{2} \operatorname{Im} a_2 \mu_1^2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ & + 27a_0^2 \operatorname{Im} a_2 \beta \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^6 d\tau + 27a_0^2 \operatorname{Im} a_2 \beta \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau + \\ & + \int_{\Omega} |Lf(x, \tau)|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.52)

Отсюда в силу оценок (3.19), (3.35) и неравенства:

$$\|Lf\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{12} \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \quad (3.53)$$

получим справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}^2 + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq \\ & + c_{13} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right) + c_{14} \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, I)}^2 d\tau + \\ & + c_{15} \int_0^t \|L\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(0, I)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Используя формулу для оператора L нетрудно установить справедливость неравенства:

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, t)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, I)} \leq \frac{1}{a_0} \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)} + \frac{\mu_1}{a_0} \|\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}. \quad (3.55)$$

С учетом этого неравенства и оценки (3.19) из неравенства получим справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}^2 + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq \\ & \leq c_{16} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right) + c_{17} \int_0^t \|L\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(0, I)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

В силу неотрицательности второго слагаемого можем написать следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}^2 \leq c_{16} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right) + \\ & + c_{17} \int_0^t \|L\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(0, I)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

С помощью леммы Гронуолла из этого неравенства получим справедливость оценки:

$$\|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}^2 \leq c_{18} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.57)$$

С учетом этой оценки из неравенства (3.56) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}^2 + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq \\ & \leq c_{19} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Из неравенства (3.55) в силу оценок (3.19) и (3.57) имеем:

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, t)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, I)}^2 \leq c_{20} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.59)$$

Суммируя (3.18), (3.34) и (3.59) получим справедливость следующей оценки:

$$\|\psi^N(\cdot, t)\|_{W_2^2(0, I)}^2 \leq c_{21} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.60)$$

Теперь оценим $\frac{\partial \psi^N}{\partial t}$. С этой целью каждое k -ое уравнение системы (3.11) на свое $\frac{d\bar{c}_k^N(t)}{dt}$ и все полученные равенства просуммируем по $k=1$ до $k=N$. Тогда полученное уравнение интегрируя по интервалу $(0, T)$ имеем:

$$\int_{\Omega} \left(i \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 + a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} - a(x) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) dx d\tau +$$

$$+ \int_{\Omega} \left(v_0(t) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + i v_1(t) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + a_2 |\psi^N|^2 \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) dx d\tau = \int_{\Omega} f \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} dx d\tau.$$

Из этого равенства с помощью неравенства Коши-Буняковского получим следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx dt \leq 7 a_0^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right|^2 dx dt + 7 \mu_4^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx dt +$$

$$+ 7 (\mu_1^2 + b_0^2 + b_1^2) \int_{\Omega} |\psi^N|^2 dx dt + 7 |a_2|^2 \int_{\Omega} |\psi^N|^6 dx dt + 7 \int_{\Omega} |f|^2 dx dt.$$

(3.61)

Теперь оценим четвертое слагаемое правой части этого неравенства. В силу неравенства, известного из работы [21, cmp.78], можем написать следующее неравенство:

$$\|\psi^N(., t)\|_{L_{\infty}(0, I)} \leq \tilde{\beta} \left\| \frac{\partial \psi^N(., t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, I)}^{\frac{1}{2}} \|\psi^N(., t)\|_{L_2(0, I)}^{\frac{1}{2}}, \forall t \in [0, T].$$

(3.62)

Здесь $\tilde{\beta} > 0$ - некоторая постоянная. Из этого неравенства в силу оценок (3.18) и (3.34) имеем:

$$\|\psi^N(., t)\|_{L_{\infty}(0, I)}^6 \leq c_{22} \left(\|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T].$$

(3.63)

В силу этой оценки и оценки (3.60) из неравенства получим справедливость следующей оценки:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{23} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.64)$$

Интегрируя обе части оценки (3.60) по t по интервалу $(0, T)$ и полученную оценку суммируя с оценкой (3.64) получим следующую оценку:

$$\|\psi^N\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_{24} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T], N = 1, 2, \dots, \quad (3.65)$$

где $c_{24} > 0$ постоянная не зависит от N . Используя эту оценку с выбором $c_0 = c_{24}$ нетрудно доказать утверждение леммы. Лемма 3.1 доказана.

Теперь продолжим доказательство теоремы. Благодаря оценке (3.13) или (3.65) из последовательности $\{\psi^N(x, t)\}$ можем выделить подпоследовательность $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$, которая сходится к функции $\psi(x, t)$ слабо в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega)$. Покажем, что эта

предельная функция $\psi(x, t)$ является решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) в смысле определения 2.1. С этой целью сначала докажем, что эта функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) для почти всех $(x, t) \in \Omega$. Поэтому при $N = N_m$ уравнение из (3.11) умножим на произвольную функцию $\bar{\eta}_k(t)$, где $\bar{\eta}_k(t)$ есть k -й коэффициент Фурье произвольной функции $\bar{\eta}(x, t)$ из пространства $L_2(\Omega)$, то есть $\bar{\eta}_k(t) = (\bar{\eta}(\cdot, t), u_k)_{L_2(0, l)}$. Полученные уравнения складываем по k от $k=1$ до $N' \leq N_m$ и результат проинтегрируем в пределах от нуля до T . Тогда получим:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi^{N_m}}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial x} - a(x) \psi^{N_m} + v_0(t) \psi^{N_m} + i v_1(t) \psi^{N_m} + a_2 |\psi^{N_m}|^2 \psi^{N_m} - f(x, t) \right) \bar{\eta}^{N'}(x, t) dx dt = 0 \quad (3.66)$$

для любой функции $\bar{\eta}^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) u_k(x)$, $N' \leq N_m$. В силу компактности вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega)$ можем написать следующее предельное соотношение:

$$\psi^{N_m} \rightarrow \psi \quad \text{сильно} \quad \text{в} \quad L_2(\Omega) \quad (3.67)$$

при $m \rightarrow \infty$. Тогда известно, что из последовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ можно выделить подпоследовательность, которую для общности снова обозначим через $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$, сходится почти всюду в Ω , то есть имеет место предельное соотношение:

$$\psi^{N_m}(x, t) \rightarrow \psi(x, t) \quad \text{почти всех } (x, t) \in \Omega \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (3.68)$$

С другой стороны, в силу вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, l))$ можем написать следующее неравенство:

$$\|\psi^{N_m}\|_{L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, l))} \leq c_{25} \|\psi^{N_m}\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}.$$

Тогда в силу оценки (3.13) при $N = N_m, m = 1, 2, \dots$ имеем:

$$\|\psi^{N_m}\|_{L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, l))} \leq c_{26}, m = 1, 2, \dots \quad (3.69)$$

С помощью этого неравенства можем написать следующее неравенство:

$$\|\psi^{N_m}\|^2 \|\psi^{N_m}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_0^T \left\| \psi^{N_m}(\cdot, t) \right\|_{L_2(0, l)}^2 \|\psi^{N_m}(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 dt \leq \int_0^T \|\psi^{N_m}(\cdot, t)\|_{L_6(0, l)}^6 dt, m = 1, 2, \dots \quad (3.70)$$

С другой стороны, в силу неравенства (3.62) при $N = N_m, m = 1, 2, \dots$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\psi^{N_m}(\cdot, t)\|_{L_6(0, l)}^6 dt &\leq l \int_0^T \|\psi^{N_m}(\cdot, t)\|_{L_{\infty}(0, l)}^6 dt \leq c_{26} \int_0^T \|\psi^{N_m}(\cdot, t)\|_{W_2^1(0, l)}^6 dt \leq \\ &\leq c_{27} \|\psi^{N_m}\|_{L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, l))}^6, m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда в силу этого неравенства и неравенства (3.69) из неравенства (3.70) получим справедливость следующего неравенства:

$$\left\| |\psi^{N_m}|^2 \psi^{N_m} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{28}, m = 1, 2, \dots$$

(3.71)

Поэтому из этого неравенства и силу известных лемм из работы [22, стр.330–331] установим справедливость следующего предельного соотношения:

$$|\psi^{N_m}|^2 \psi^{N_m} \rightarrow |\psi|^2 \psi \quad \text{слабо} \quad \text{в} \quad L_2(\Omega)$$

(3.72)

при $m \rightarrow \infty$. Учитывая это предельное соотношение и слабую сходимость подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ к функции $\psi(x, t)$ в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega)$ и переходя к пределу по $N_m, m = 1, 2, \dots$ в интегральном тождестве (3.66) получим справедливость следующего интегрального тождества:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + \right. \\ \left. + v_0(t) \psi + iv_1(t) \psi + a_2 |\psi|^2 \psi - f(x, t) \right) \bar{\eta}^{N'}(x, t) dx dt = 0$$

для любой функции $\bar{\eta}_k^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) \mu_k(x)$. В виду того, что $\bar{\eta}_k^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) \mu_k(x)$

является частичной суммой ряда $\bar{\eta}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\eta}_k(t) \mu_k(x)$, при $N' \rightarrow \infty$ частичная сумма $\bar{\eta}_k^{N'}(x, t)$ сходится к функции $\bar{\eta}(x, t)$ в $L_2(\Omega)$. Тогда с учетом этого если переходить к пределу в последнем тождестве, то получим того, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + \right. \\ \left. + v_0(t) \psi + iv_1(t) \psi + a_2 |\psi|^2 \psi - f(x, t) \right) \bar{\eta}(x, t) dx dt = 0$$

(3.73)

для любой функции $\eta = \eta(x, t)$ из пространства $L_2(\Omega)$. Отсюда заключаем, что предельная функция $\psi(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (2.2) для почти всех $(x, t) \in \Omega$. Теперь покажем, что эта функция $\psi(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет начальному условию (2.3) для почти всех $x \in (0, l)$, то есть условию $\psi(x, 0) = \varphi(x), \forall x \in (0, l)$. В силу теорем компактного вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $C^0([0, T], L_2(0, l))$ можем написать следующее предельное соотношение:

$$\|\psi^{N_m}(\cdot, t) - \psi(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0 \quad (3.74)$$

равномерно относительно $t \in [0, T]$ при $m \rightarrow \infty$. Кроме того, можем написать следующее неравенство:

$$\|\psi(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0, l)} \leq \|\psi(\cdot, 0) - \psi^{N_m}(\cdot, 0)\|_{L_2(0, l)} + \|\psi^{N_m}(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0, l)}. \quad (3.75)$$

Используя предельное соотношение (3.74) при $t = 0$ получаем, что первое слагаемое в правой части этого неравенства при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Поэтому покажем, что и второе слагаемое в правой части этого неравенства при $m \rightarrow \infty$ также стремится к нулю. Используя формулу (3.10) имеем:

$$\psi^{N_m}(x, 0) = \sum_{k=1}^{N_m} c_k^{N_m}(0) u_k(x) = \sum_{k=1}^{N_m} \varphi_k u_k(x) = \varphi^{N_m}(x).$$

Ввиду того, что $\varphi^{N_m}(x)$ является частичной суммой ряда Фурье для функции $\varphi = \varphi(x)$ из пространства $W_2^2(0, l)$, удовлетворяющей условиям $\frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0$. С учетом этого если переходить к пределу во втором слагаемом правой части неравенства (3.75), то при $m \rightarrow \infty$ получим, что оно стремится к нулю, то есть имеет место предельное соотношение:

$$\|\psi^{N_m}(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty.$$

(3.76)

Таким образом, с учетом этого предельного соотношения и предельного соотношения (3.74) при $t = 0$ если переходить к пределу в обеих частях неравенства (3.75), то при $m \rightarrow \infty$ получим справедливость соотношения:

$$\|\psi(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0, l)} = 0.$$

Из этого соотношения получаем, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет условию начальному условию из (2.3), то есть $\psi(x, 0) = \varphi(x), \forall x \in (0, l)$. Наконец, докажем, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.4). Известно из работ [22, 23], что для элементов подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ в силу теоремы о следах имеет место соотношения:

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(0, \cdot)}{\partial x}, \frac{\partial \psi^{N_m}(l, \cdot)}{\partial x} \in L_2(0, T), m = 1, 2, \dots$$

(3.77)

В силу свойства сходимости подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ получим справедливость предельных соотношений: при $m \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(0, \cdot)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi(0, \cdot)}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(0, T), \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(l, \cdot)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi(l, \cdot)}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(0, T). \quad (3.79)$$

С другой стороны, для элементов подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ имеет место следующие равенства

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(s, t)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N_m} c_k^{N_m}(t) \frac{du_k(s)}{dx}, s = 0, l.$$

Из этих равенств в силу условий $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0$ получим справедливость следующих соотношений:

$$\frac{\partial \psi^{N_b}(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi^{N_b}(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.80)$$

Для $\forall \eta \in L_2(0, T)$ можем написать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt &= \int_0^T \left(\frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{N_p}(s, t)}{\partial x} \right) \bar{\eta}(t) dt + \\ &+ \int_0^T \frac{\partial \psi^{N_p}(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt, s = 0, l. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Тогда с учетом соотношений (3.80) и предельных соотношений (3.78), (3.79) если переходить к пределу в обеих частях равенств (3.81), то отсюда при $m \rightarrow \infty$ для любой функции $\eta \in L_2(0, T)$ получим справедливость соотношений:

$$\int_0^T \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt = 0, s = 0, l.$$

Из этих соотношений получим, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.4) для почти всех $t \in (0, T)$, то есть имеет место:

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, \forall t \in (0, T).$$

Таким образом, нами доказано, что предельная функция $\psi(x, t)$ является решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ и это решение принадлежит пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка (3.1), которая непосредственно следует из оценки (3.13) после перехода к нижнему пределу по слабо сходящейся подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ из $W_2^{2,1}(\Omega)$ к функции $\psi(x, t)$.

Теперь докажем единственность решения редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$. Пусть любые две функции $\psi(x, t)$ и $\phi(x, t)$ являются решениями редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$. Обозначим $w(x, t) = \psi(x, t) - \phi(x, t)$. Тогда ясно, что функция $w = w(x, t)$ будет решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial w}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ia_1(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} - a(x)w + v_0(t)w + iv_1(t)w + a_2(|\psi|^2 + |\phi|^2)w + \\ + a_2\psi\phi\bar{w} = 0, (x, t) \in \Omega, \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$w(x, 0) = 0, x \in (0, l), \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T). \quad (3.84)$$

Ввиду того, что функции $\psi(x, t)$ и $\phi(x, t)$ являются решениями редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ и принадлежат пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$ функция $w = w(x, t)$ будет удовлетворять следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial w}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + i a_1(x, \tau) \frac{\partial w}{\partial x} - a(x) w + v_0(\tau) w + i v_1(\tau) w + \right. \\ \left. + a_2(|\psi|^2 + |\phi|^2) w + a_2 \psi \phi \bar{w} \right) \bar{\eta}(x, \tau) dx d\tau = 0, \forall t \in [0, T]$$

(3.85)

для любой функции $\eta \in L_2(\Omega)$ и начальному условию (3.83) для почти всех $x \in (0, l)$ и краевым условиям (3.84) для почти всех $t \in (0, T)$. В этом интегральном тождестве вместо функции $\eta(x, t)$ возьмем функцию $w(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$. Тогда с помощью интегрирования по частям можем написать равенство, из которого вычитывая его комплексное сопряжение имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \bar{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} w \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left(a_1(x, \tau) \frac{\partial w}{\partial x} \bar{w} + a_1(x, \tau) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} w \right) dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |w|^2 dx d\tau + \\ + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\phi|^2) |w|^2 dx d\tau + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re}(\psi \phi (\bar{w})^2) dx d\tau + \\ + 2 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(\psi \phi (\bar{w})^2) dx d\tau = 0, \forall t \in [0, T].$$

(3.86)

Преобразуя второе слагаемое левой части этого равенства и используя условия $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$, получим справедливость следующего равенства:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \bar{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} w \right) dx d\tau + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\phi|^2) |w|^2 dx d\tau = \\ = -2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |w|^2 dx d\tau - 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re}(\psi \phi (\bar{w})^2) dx d\tau - 2 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(\psi \phi (\bar{w})) dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

Из этого равенства с помощью условия (3.83) получим справедливость неравенства:

$$\|w(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\phi|^2) |w|^2 dx d\tau \leq \\ \leq 2 \int_{\Omega_t} |v_1(\tau)| |w|^2 dx d\tau + 2(|\operatorname{Im} a_2| + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} |\psi| |\phi| |w|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

С помощью неравенства $2|\psi| |\phi| \leq |\psi|^2 + |\phi|^2$ и условий на функции $v_1(t)$, а также условия (2.5), получим следующее неравенство:

$$\|w(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\phi|^2) |w|^2 dx d\tau \leq 2b_1 \int_{\Omega_t} |w|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

В силу неотрицательности второго слагаемого левой части получим следующее неравенство:

$$\|w(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq 2b_1 \int_0^t \|w(., \tau)\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

Применяя лемму Гронуолла получим справедливость соотношения:

$$\|w(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Отсюда следует, что

$$w(x,t) = 0, \quad \forall x \in (0, l): \forall t \in [0, T].$$

Из этого соотношения и формулы $w(x,t) = \psi(x,t) - \phi(x,t)$ следует единственность решения редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$. Теорема 3.1 доказана.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелявистская теория. М.: Физматгиз, 1963, т. 3, 702 с.
2. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985, 366 с.
3. Журавлев В.М. Нелинейные волны в много компонентных системах с дисперсией и диффузией. Ульяновск, УлГУ, 2001, 200 с.
4. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // Докл. АН СССР, 1988, т. 303, № 5, с. 1044-1048.
5. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами // Автоматика и телемехан., 1989, № 12, с. 27-38.
6. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения, 1997, т.33, № 12, с. 1691-1698.
7. Искендеров А., Ягубов Г. Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера // Вестник Ленкоранского гос. ун-та. Сер. Естественных наук, 2007, Ленкорань, с. 3-56.
8. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. Идентификация квантовых потенциалов. Баку, Чашыоглу, 2012, 548 с.
9. Ibragimov N.S. Solvability of initial-boundary value problems for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. News of Baku State University, Ser. Phys. Math. Sciences, No.3, 2010, pp.72-84. (in Russian).
10. Ibragimov N.S. Solvability of initial-boundary value problems for a linear stationary equation of quasi-optics. International Journal of Caucasian University "Mathematics and Informatics", Vol.1, No.29, 2010, pp.61-70. (in Russian).
11. G. Yagub, N. Ibrahimov, N. Suleymanov The second initial-boundary value problem for a linear one-dimensional Schrödinger equation with a special gradient term and time dependent measurable boundary complex potential // Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Natural sciences series, 1, 2022, pp. 13-30 (in Russian)
12. Akbaba G.D. The optimal control problem with the Lions functional for the Schrödinger equation including virtual coefficient gradient. Master's thesis, Kars, 2011, 71 pp. (in Turkish).
13. Yagubov G., Toyoglu F., Subasi M. An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation // Applied Mathematics and Computation, vol. 218, iss.11, 2012, pp.6177-6187.
14. M. Zengin, N.S. Ibrahimov, G. Yagub Existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem with boundary functional for nonlinear stationary quasi-optical equation with a special gradient term // Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Natural sciences series, 2021, № 1, pp. 27-42.

15. G.Yakub, N.S. Ibrahimov, M. Zengin Optimal control problem for the stationary quasi-optics equation with a special gradient term // Advanced Mathematical Models and Applications, 2021, Vol. 6, № 3, pp. 252-265.
16. Yagub G., Ibrahimov N.S, Zengin M. Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with a special gradient terms // Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15, 2015- pp.53-54.
17. Yagub G., Ibrahimov N.S., Aksoy N.Y. On the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with special gradient terms // Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27, 2016 - pp.170-171.
18. Ягубов Г., Салманов В., Ягубов В., Зенгин М. Разрешимость начально-краевых задач для нелинейного двумерного уравнения Шредингера // Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук, № 4 (85), 2017, с. 7-21.
19. G. Yagub, N.S. Ibrahimov and M. Zengin The solvability of the initial-boundary value problems for a nonlinear Schrodinger equation with a special gradient term // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, № 2, 2018, pp. 214-232.
20. А. Искендеров, Г. Ягуб, В. Салманов Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом // Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук, № 4(93), 2018, с. 28-43.
21. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М: Наука, 1973, 408 с.
22. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М: Наука, 1967, 736 с.
23. Lions J.-L., Magenes E. Non-homogeneous boundary value problems and applications - vol. 2. Berlin, 1972, 307 p.
24. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982, 332 с.
25. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 430 с.
26. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980, 518 с.

ZAMANDAN ASILI XÜSUSİ QRADİENT TƏRKİBLİ, ÖLÇÜLƏ BİLƏN MƏHDUD KOMPLEKS POTENSİALLI QEYRİ-XƏTTİ QEYRİ-STASİONAR ŞREDİNGER TƏNLİYİ ÜÇÜN İKİNCİ NÖV BAŞLANGIC-SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Natiq İbrahimov

Qabil Yaqub

Tuba Ülkər

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

Qars Qafqaz Universiteti, Qars, Azərbaycan

Bu məqalədə xüsusi qradient həddli və zamandan asılı məhdud ölçülən kompleks potensiallı qeyri-xətti qeyri-stasionar bir ölçülü Şredinger tənliyi üçün ikinci növ başlağic-sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Qalerkin üsulundan istifadə edərək baxılan başlağic-sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi teoremi isbat edilmişdir.

Açar sözlər: qeyri-xətti Şredinger tənliyi, qradient hədd, kompleks potensial, Qalerkin üsulu

THE SECOND INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR ONE-DIMENSIONAL NONSTATIONARY SCHRÖDINGER EQUATION WITH A SPECIAL GRADIENT TERM AND WITH A MEASURABLE LIMITED COMPLEX POTENTIAL THAT DEPENDS ONLY ON TIME

Natig Ibrahimov

Gabil Yagub

Tuba Ulker

Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan

Kars Kafkas University, Kars, Turkey

In this paper, we consider the second initial-boundary value problem for a nonlinear one-dimensional nonstationary Schrödinger equation with a special gradient term and with a measurable limited complex potential that depends only on time. At the same time, using the Galerkin method, the theorem on the existence and uniqueness of the solution of the second initial boundary value problem under consideration is proved.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, gradient term, complex potential, Galerkin method

Daxil oldu: 17.03.2025

Çap edildi: 26.05.2025



Elmi xəbərlər jurnalı Lənkəran Dövlət Universitetinin
mətbəəsində çap olunmuşdur

Yığıma verilmişdir: 17.03.2025
Çapa imzalanmışdır: 26.05.2025

Kağızın formatı: $60 \times 84 \frac{1}{8}$
Çap vərəqi: 6.25 c.v., tiraj: 100

Ünvan: Az 4200, Lənkəran şəhəri, General Həzi Aslanov xiyabanı 50
e-mail: elmi_meqale@lsu.edu.az
www.lsu.edu.az